UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN MARTIN

UNIDAD ACADEMICA

ARQUITECTURA, DISEÑO Y URBANISMO

CURSO PREPARATORIO UNIVERSITARIO

CPU

Anexo Teórico
Los números y las operaciones
Ecuaciones e inecuaciones

MATEMATICA

Prof. Beatriz Cecilia Artesi

Índice

PARTE I: Los números y las operaciones

PARTE II: Ecuaciones e inecuaciones

PARTE I

LOS NUMEROS Y LAS OPERACIONES

I-CAPITULO 1: Conjuntos numéricos

Para trabajar con los números, es conveniente conocer lo elemental sobre conjuntos numéricos.

1. NUMEROS NATURALES: N

La primera herramienta matemática que el hombre necesitó fue algo que le permitiera **contar.**
Este fue el origen del conjunto de los **Números Naturales.** $N = \{1,2,3,4,5,...\}$
La idea del **cero** apareció más tarde, conformando el conjunto $N_0 = N \cup \{0\}$ $N_0 = \{0,1,2,3,4,5,...\}$

2. NUMEROS ENTEROS: Z

Planteemos la siguiente pregunta:

¿Qué número le tengo que sumar a 3 para obtener 1?

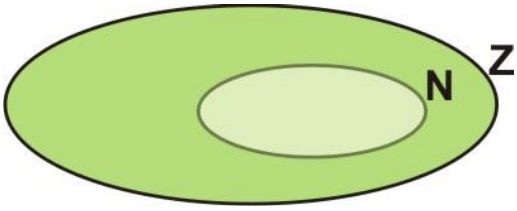
Simbólicamente $3 + x = 1$
Entonces $x = 1 - 3$
Esta operación entre números naturales no arroja un resultado en N.
Situación que desencadena la creación de un conjunto numérico, el de los **Números Enteros.**

$$Z = \{...,-5,-4,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,+4,+5,...\}$$

Asociamos a cada número positivo el número natural correspondiente.
Así, al +4 lo notamos como 4.
De este modo el conjunto Z se puede escribir así

$Z = \{...,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,...\}$ o bien $Z = \{...,-5,-4,-3,-2,-1,0\} \cup \{1,2,3,4,5,...\}$

Vemos que el conjunto de los Números Enteros es una ampliación del conjunto de los Números Naturales



$$Z = \{...,-5,-4,-3,-2,-1,0\} \cup N$$

Otra forma:

$$Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+ \text{ siendo } Z^- = \{x \in Z / x \langle 0\} \text{ y } Z^+ = \{x \in Z / x \rangle 0\}$$

Ahora sí existe una solución en Z para la ecuación antes planteada: $3 + x = 1$. El número buscado es -2.
Veamos.
Si $x = -2$, al reemplazar en la ecuación dada, resulta: 3 + (-2)=3-2=1, que es el valor esperado.

$$S_Z = \{-2\} \quad \text{pero} \quad S_N = \phi$$

Ejercicio I-1

1) Escribir dos números naturales entre 4 y 8
2) Encontrar un número natural que sea la mitad de 24, si fuera posible.
3) Idem ej 2) para el número 17. Justificar la respuesta.
4) ¿La suma de dos naturales, es natural?
5) ¿La resta de dos naturales cualesquiera, es natural? Dar contraejemplos, si no lo fuera.
6) ¿La multiplicación y división de naturales, es un número natural?
7) Encontrar tres números enteros entre -2 y -3 si fuera posible.
8) Idem ejercicio 7) para números entre -1 y 8.
9) ¿La suma y resta de enteros, es un numero entero?
10) ¿La multiplicación y división de dos números enteros, es un número entero?

Respuestas I-1

1) 5 y 7 por ejemplo, hay otros. **2)** 12 **3)** No existe pues 17:2=8,5 que se encuentra comprendido entre 8 y 9. Como entre dos naturales consecutivos no hay otro natural, 17:2 no es natural. **4)** Sí **5)** No siempre. Por ejemplo 9-11=-2 que no es natural. **6)** Sí **7)** No existe ninguno, son consecutivos y entre dos enteros consecutivos no hay otro. **8)** 3, 7 y 4 por ejemplo, hay otros. **9)** Sí. **10)** La multiplicación sí, la división, no siempre. Por ejemplo, 17:2 no es natural, entonces no es entero

3. NUMEROS RACIONALES: Q

En Z tampoco existe respuesta a esta pregunta:

¿Cuál es la mitad de 3? $x = 3:2$

De ahí surgió la necesidad de disponer de un conjunto que tuviera elementos de la forma $\frac{3}{2}$.

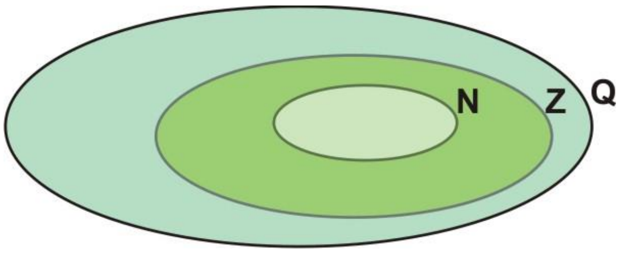
El nuevo conjunto numérico es el de los **Números Racionales**, formado por cocientes de dos números enteros, cuyo denominador debe ser distinto de cero.

Simbólicamente: $Q = \left\{ \frac{a}{b} / a \in Z, b \in Z, b \neq 0 \right\}$

Como $\frac{a}{b}$ tiene que ver con una división: *a dividido b,* analicemos los siguientes ejemplos dividiendo el numerador por el denominador:

- 2/5 representa el mismo número que la expresión decimal 0,4.
- -15/8 equivale a -1,875.
- 14/7 es igual a 2.
- 1/8 se ubica en 0,125.

Éste último es un número entero (es natural, entonces también es entero).
Vemos que 2 se puede expresar como una fracción cuyo numerador es el doble del denominador.
Por lo cual, el conjunto de los números racionales (*Q*) es una ampliación del de los números enteros (*Z*).



Si buscamos una expresión decimal equivalente a 1/7, efectuamos la división. Vemos que ninguno de los restos obtenidos será cero y que en algún momento se vuelven a repetir, por lo que podríamos seguir dividiendo indefinidamente. Estamos en presencia de expresiones decimales periódicas (infinitas cifras decimales cuya parte decimal contiene un "*bloque*" que se repite indefinidamente: llamado "*período*").

Expresiones decimales

- Consideremos una expresión decimal con finitas cifras decimales, por ej. m=1,23 (dos decimales). Se lee: "*Un entero, veintitrés centésimos*" $1\frac{23}{100}$ o bien *"Ciento veintitrés centésimos"* $\frac{123}{100}$
  Este número se puede pensar como una *fracción decimal*
  (éstas son las fracciones de denominador 10, 100, 1000,…): $\frac{123}{100} = \frac{123}{10^2} = \frac{123}{(2.5)^2} = \frac{123}{2^2.5^2}$.
  Observemos que la cantidad de cifras decimales de 1,23 (2 cifras) coincide con la cantidad de ceros del denominador en la fracción decimal $\frac{123}{100}$ (2 ceros).

- Analicemos el mismo procedimiento para t=0,125
  "Ciento veinticinco milésimos" $\frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$
  Se puede expresar $0{,}125 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3 5^0}$, también $0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{125}{10^3} = \frac{125}{2^3 5^3}$

Podemos decir que la fracción resultante tiene denominador $10^n = (2.5)^n = 2^n.5^n$, con *n* número natural incluido el cero, tanto en el caso de "m" como de "t" (expresiones decimales con finitas cifras decimales).

Generalizando:

Toda *expresión decimal con finitas cifras decimales* se puede escribir como una fracción irreducible cuyo denominador se compone de un producto de $2^n.5^p$, con *n* y *p* números naturales, incluido el cero.

Esta característica nos permite decidir si fracción $\frac{3}{20}$ corresponde a una expresión decimal con finitas cifras decimales.
Para ello sólo nos basta con analizar el denominador.
Tenemos que obtener como denominador, un producto de $2^n.5^p$, con *n* y *p* naturales incluido el cero.

$$\frac{3}{20}=\frac{3}{2^2.5}=\frac{3.5}{2^2.5.5}=\frac{15}{2^2.5^2}=\frac{15}{10^2}=0{,}15$$

Nuestro objetivo es buscar una fracción equivalente a la dada (no es necesario exigir que sea irreducible), cuyo denominador sea 10^n (buscar una fracción decimal) y a partir de ahí determinar la expresión decimal que se asocia a la fracción dada.

En la ocasión de estudiar la fracción $\frac{1}{7}$, su denominador nunca se podrá escribir como un producto de $2^n.5^p, n \in N_0, p \in N_0$, en virtud de contener otro factor que no es múltiplo de 2 ni de 5.

Entonces, $\frac{1}{7}$ no podrá ser escrito en la forma $\frac{k}{10^n}, k \in Z$, razón que indica que no corresponde a una expresión decimal con finitas cifras decimales. Diremos que la expresión decimal asociada a $\frac{1}{7}$ es una expresión decimal periódica.

Toda fracción cuyo denominador se pueda escribir como producto de los números 2 y 5 solamente (pudiendo aparecer sólo un 2 o sólo un 5, o ninguno de ellos en el caso de racionales enteros) **podrá ser escrita como expresión decimal con finitas cifras decimales. En cualquier otro caso, o sea si en la factorización del denominador figura algún factor primo distinto de 2 y 5, derivará en una expresión decimal periódica.**

Número Primo:
número entero que tiene
exactamente dos divisores: **el 1 y sí mismo**

Por esta razón, el conjunto de los números racionales se puede entender como un conjunto de expresiones decimales de dos tipos:

Q

Expresiones decimales

Con finitas cifras decimales	**Con infinitas cifras decimales periódicas**
por ej. -1,875	por ej. $0{,}\underline{142857}142857142857\ldots = 0{,}142857$

Si pensamos a una expresión decimal con finitas cifras decimales como una expresión decimal periódica cuyo período es cero,

por ejemplo -1,875=-1,875000000000000…=$1{,}875\overset{\frown}{0}$

el conjunto **Q** se identifica como el **conjunto de todas las expresiones decimales periódicas posibles**.

4. NUMEROS IRRACIONALES: I

Sea la expresión: 3,4544554445554444555….

Vemos que tiene infinitas cifras decimales, pero no hay un sector que se repite como con los números periódicos, porque el bloque que escribimos cambia constantemente, en este caso con una clara regularidad, pero no siempre tiene que ser así.

Otro ejemplo: 0,1234567891011121314…

Así, diremos que:

El conjunto de los **Números Irracionales** (I) está formado por todas las expresiones decimales con infinitas cifras decimales no periódicas.

El conjunto de irracionales también es infinito, al igual que los racionales.

Veremos algunos irracionales interesantes.

- **El número π**

  π representa las veces que entra el diámetro de una circunferencia en su longitud, aproximadamente 3,14. La sucesión de dígitos que definen al número π es infinita y no es periódica. $\pi = 3{,}14159265...$es el cociente entre la longitud de la circunferencia y su radio $\pi = \frac{long.circ}{d}$ siendo *d* el diámetro de la misma, lo cual nos lleva a decir cómo calcular la longitud de la circunferencia conociendo su radio: $long.circ = \pi .d$

- Se puede demostrar que, entre otras raíces, **las raíces cuadradas y cúbicas de los números primos** también son irracionales:

  $$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{13}, ... \qquad \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{11}, \sqrt[3]{13} ...$$

- **El número e**=2,718281… que tiene muchas curiosidades en geometría, álgebra, cálculo y otras disciplinas.

- **El número de oro** $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, interviene en la proporción áurea que está presente en la relación entre los lados de ciertos rectángulos especiales (los rectángulos áureos) llamada en la antigua Grecia la *divina proporción*. Las tarjetas de crédito, las hojas tamaño oficio, las postales, las banderas y muchos otros objetos mantienen esta proporción entre sus lados, al igual que infinidad de objetos arquitectónicos ofreciendo gran armonía en su diseño. Este número tiene cantidad de particularidades en series matemáticas y construcciones geométricas entre las cuales se destaca el pentágono estrellado o pentagrama (también llamado pentalfa: cinco A entrecruzadas) que era el emblema de lo pitagóricos.

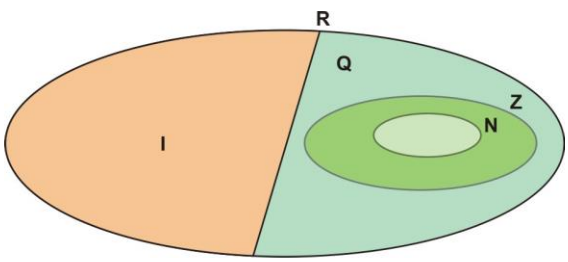
5. NUMEROS REALES: R

Podemos ver que el conjunto de números Irracionales no tiene elementos en común con *Q*.

Definimos el conjunto de los **Números Reales** como la unión de los Racionales y los Irracionales.

$$R = Q \cup I$$

I-CAPITULO 2: Operaciones con los números



Cuando trabajamos con los números debemos identificar claramente cuáles son las operaciones que se realizan entre ellos y tener presentes una serie de estrategias para no confundir los procedimientos.

1. SUMA Y RESTA DE ENTEROS

Para sumar y restar números enteros es aconsejable que activen mecanismos que ofrezcan seguridad en la resolución.

SUMA DE ENTEROS:
Sumar números enteros positivos es equivalente a sumar los naturales asociados, por ejemplo:

(+2)+(+6)=2+6=8

La suma de dos números enteros negativos arroja un número negativo. La operación es equivalente a sumar los naturales positivos asociados, y dar por resultado el opuesto, por ejemplo:

(-5)+(-14)= -19

Al sumar dos números enteros de distinto signo se restan los naturales asociados (el mayor menos el menor) y el signo que resulta es el que corresponde al mayor natural, por ejemplo:

(-3)+(+4)= +1=1 (+15)+(-2)=+13=13 (-10)+(+2)= -8

RESTA DE ENTEROS:
Restar dos números enteros es lo mismo que **sumarle al primero el opuesto del segundo**, por ejemplo:

(+3)-(-5)=(+3)+(+5)=8 (-7)-(+2)=(-7)+(-2)=-9

SUMA ALGEBRAICA:
A la hora de trabajar con sumas y restas combinadas, llamadas sumas algebraicas, se puede pensar la operación de izquierda a derecha de a dos números, operando primero dentro de los paréntesis. Pero existe una modalidad más práctica que apela a la supresión e intercalación de paréntesis que genera un menor esfuerzo con resultados eficaces.

a. Supresión de paréntesis.
Solo se pueden suprimir paréntesis si no están afectado por multiplicación, división, potencia ni raíz. Además, deben contener solamente sumas y restas. En estas condiciones, tenemos dos posibilidades de acuerdo al signo que los preceda:

- Al suprimir un paréntesis precedido por un signo más (se suprimen los paréntesis y el signo que los precede) no se cambian los signos positivos y negativos que se encuentran adentro del mismo.
- Al suprimir un paréntesis precedido por un signo menos (se suprimen los paréntesis y el signo que los precede) se cambian los signos positivos (por negativos) y los negativos (por positivos) que se encuentran adentro del mismo.

b. Incorporación de paréntesis
Se trabaja con una modalidad similar.

Veamos algunos ejemplos.

Ejercicios:
a) Realizar los siguientes cálculos suprimiendo paréntesis, corchetes y llaves
b) Operar de otro modo, realizando cálculos parciales

1.1) $(+3)-(-5)+(-2)-(-3)+(+1)-(+4)=$

1.2) $\{-2-[2+(-1+4)-5+2-(7-1-30+6)+6]\}=$

1.3) $-5-3+(-2+1+5-3)-4+2-[-6-(-2)+(6-1-3)+6]-2=$

1.4) $-\{6-4+[-2-(1+3)+(-5-1)+2]+1\}-3+(-1)=$

<u>Resolución</u>:

1.1) a) ídem b)

$$(+3)-(-5)+(-2)-(-3)+(+1)-(+4)=$$
$$=+3+5-2+3+1-4=$$
$$=(3+5+3+1)-(2+4)=$$
$$=12-6=6$$

Renglón 2: supresión de paréntesis
Renglón 3: agrupación positivos y negativos (incorporación de paréntesis)
Renglón 4: resta

1.2) a)

$$\{-2-[2+(-1+4)-5+2-(7-1-30+6)+6]\}=$$
$$=\{-2-[2-1+4-5+2-7+1+30-6+6]\}=$$
$$=\{-2-2+1-4+5-2+7-1-30+6-6\}=$$
$$=-2-2+1-4+5-2+7-1-30+6-6=$$
$$=-2-2-4+5-2+7-30=(5+7)-(2+2+4+2+30)=$$
$$=12-40=-28$$

Renglón 2: supresión de dos pares de paréntesis interiores
Renglón 3: supresión de corchetes
Renglón 4: supresión de llaves
Renglón 5: cancelación de términos opuestos, agrupación positivos y negativos
Renglón 6: resta

b)

$$\{-2-[2+(-1+4)-5+2-(7-1-30+6)+6]\}=\left\{-2-\left[2+3-3+18+6\right]\right\}=\left\{-2-26\right\}=-28$$

1.3) a)

$$-5-3+\left(-2+1+5-3\right)-4+2-[-6-(-2)+(6-1-3)+6]-2=$$
$$=-5-3-2+1+5-3-4+2-[-6+2+6-1-3+6]-2=$$
$$=-5-3-2+1+5-3-4+2+6-2-6+1+3-6-2=$$
$$=-3+1-4-2+1-6-2=(1+1)-(3+4+2+6+2)=2-17=-15$$

Renglón 2: supresión de paréntesis
Renglón 3: supresión de corchetes
Renglón 4: cancelación de términos opuestos, agrupación positivos y negativos, resta

b)

$$-5-3+\left(-2+1+5-3\right)-4+2-[-6-(-2)+(6-1-3)+6]-2=-8+1-2-\left[-6+2+2+6\right]-2=-15$$

1.4) a)

$$-\left\{6-4+\left[-2-\left(1+3\right)+\left(-5-1\right)+2\right]+1\right\}-3+\left(-1\right)=$$
$$=-\left\{6-4+\left[-2-1-3-5-1+2\right]+1\right\}-3-1=$$
$$=-\left\{6-4-2-1-3-5-1+2+1\right\}-3-1=$$
$$=-6+4+2+1+3+5+1-2-1-3-1=$$
$$=-6+4+5=(4+5)-6=3$$

Renglón 2: supresión de paréntesis
Renglón 3: supresión de corchetes
Renglón 4: supresión de llaves
Renglón 5: cancelación de términos opuestos, agrupación positivos y negativos, resta.

b)

$$-\left\{6-4+\left[-2-\left(1+3\right)+\left(-5-1\right)+2\right]+1\right\}-3+\left(-1\right)=-\left\{2+\left[-2-4-6+2\right]+1\right\}-4=-\left\{2-10+1\right\}-4=7-4=3$$

2. PRODUCTOS Y COCIENTES

Para multiplicar números enteros tenemos una herramienta muy útil:

LA REGLA DE LOS SIGNOS

que nos permite determinar el signo del producto o el cociente,
de acuerdo a los signos de los números que intervienen en la operación:

$$+\cdot+\rightarrow+$$
$$-\cdot-\rightarrow+$$
$$+\cdot-\rightarrow-$$
$$-\cdot+\rightarrow+$$

¿De dónde surgen las reglas de los signos?

- Veamos primero $+.+ \rightarrow +$

  Pensar en la multiplicación de dos números enteros positivos es lo mismo que pensar en el producto de dos números naturales.

  Por ejemplo (+2).(+5)=2.5=10=+10

Queda justificado a través de la definición de multiplicación que $+.+ \rightarrow +$

- Ahora $+.- \rightarrow -$

  Consideremos el producto (+3).(-6)

  De acuerdo a la definición de multiplicación,

  decir (+3) **por** (-6)

  es lo mismo que decir: sumar (+3) **veces** (-6)

  o sea 3 **veces** (-6)

  (+3).(-6)= (-6)+(-6)+(-6)=-6-6-6= -18

Podemos concluir que $+.- \rightarrow -$

- Trabajemos con $-.+ \rightarrow -$

  Para ello apelamos a la propiedad conmutativa de la multiplicación, así:

  (-2).(+3)=(+3).(-2)=-6 por lo visto en el ítem anterior

De este modo aceptamos que $-.+ \rightarrow -$

- Analicemos $-.- \rightarrow +$

  Sea el producto (-8).(-5)

  Para usar alguno de los razonamientos anteriores nos convendría pensar el -8 como resultado de un producto proveniente de un número negativo por otro positivo

  -8= (-1).(+8)= –(+8) (opuesto del 8).

  Así (-8).(-5)=[(-1).(+8)].(-5)=(-1).[(+8).(-5)]=(-1).(-40)=-(-40)=+40 (opuesto de -40)

Por lo tanto $-.- \rightarrow +$

Basándonos en que la división es la operación inversa de la multiplicación, podemos demostrar la validez de las siguientes reglas:

$$+/+\rightarrow+$$
$$-/-\rightarrow+$$
$$+/-\rightarrow-$$
$$-/+\rightarrow+$$

Ejercicios:

2.1) 5.(+6)=

2.2) 10:(-2)=

A resolver…

2.1) 5.(+6)=(+5).(+6)=+30=30

2.2) 10:(-2)=(+10):(-2)= -5

- **Regla práctica para la multiplicación de números de igual signo**

✓ El producto de **factores positivos, es siempre positivo,** independientemente de la cantidad de factores de que se trate.

✓ El producto de ***cantidad par*** **de factores negativos, ………………..es positivo.**
El producto de ***cantidad impar*** **de factores negativos, ……………..es negativo.**

3. POTENCIAS Y RAICES

- **<u>Potencias</u>**

a. Consideremos <u>a entero</u> y n natural.

Definimos **<u>potencia de un número entero</u>** a^n de la siguiente manera:

- Si n=0 y $a \neq 0$, $a^0 = 1$ (0^0 es una expresión <u>indeterminada.)</u>
- Si n=1 $a^1 = a$
- Si $n \rangle 1$ $a^n = a...a$ producto de n factores iguales a "a"
- Si $n \rangle 1$ y $a \neq 0$ $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (La división por cero no es posible)

Llamamos a "a" : *base*,
"n": *exponente*
"b": *potencia.*

En la definición se evidencia algo muy importante:
Si consideramos n número entero, la potencia de números enteros a^n no siempre arroja como resultado un número entero.

b. **<u>Potencia de un número racional.</u>** Consideremos <u>a racional</u> y n natural
Para trabajar con la potencia de números racionales, pensamos que este tipo de números son cocientes de números enteros, con denominadores no nulos.
Recordamos la propiedad distributiva, así:

$$\left(\frac{t}{s}\right)^n = \frac{t^n}{s^n}$$

<u>Signos</u>

1. En toda potencia, podemos estudiar el signo a partir de LA BASE:

✓ Si la **<u>base es positiva</u>**, el resultado es **<u>positivo</u>** .
✓ Si la **<u>base es negativa</u>**, estudiemos algo más:
  - si el **<u>exponente es un natural par</u>**, la **<u>potencia es positiva</u>** (por ser producto de cantidad par de factores negativos).
  - si el **<u>exponente es un natural impar</u>**, obtenemos una **<u>potencia negativa</u>** (por ser producto de cantidad impar de factores negativos).

2. Otra forma de enfocar el tema es tener en cuenta EL EXPONENTE y no la base.

✓ Si el **<u>exponente es par</u>**, ya sea la base positiva o negativa, por lo visto anteriormente, **<u>la potencia siempre es positiva</u>**.

✓ Si el **<u>exponente es impar</u>**:
  - Con base positiva, resulta la potencia positiva
  - Con base negativa, tenemos una potencia negativa,

Por lo tanto, en este caso **<u>la potencia respeta el signo de la base</u>**.

<u>Ejemplos</u>:

$(-2)^3 = -8$ $(+4)^2 = +16$

$(+1)^5 = +1$ $(-3)^4 = +81$

- **<u>Raíces</u>**

Como ya sabemos, la raíz es la operación inversa de la potencia.

Definición de **raíz enésima en R**:

Sea $n \in N, n \geq 2$ definimos $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$, siendo <u>b resultado único</u> (si existe más de un valor de b, por convención se adopta como resultado al valor positivo)

"*n*" es el *índice",*
"$\sqrt{\ }$" *se llama radical,*
"*a*" el *radicando*
"*b*" la *raíz enésima*.

<u>¿Qué características debe tener el radicando de raíces de índice par?</u>

Busquemos *b* de tal modo que $b = \sqrt[6]{-64}$.
Se pide *b* que cumpla $b^6 = -64$.
Vemos que b^6 es una potencia de exponente par, entonces su resultado nunca podrá ser negativo.

Lo cual nos indica que NO EXISTE un número real *b* que verifique: $b = \sqrt[6]{-64}$

<u>NO EXISTE en R</u> el valor de $\sqrt[n]{a}$, siendo <u>n par</u> y <u>a negativo</u>.

Luego en el cálculo de raíces de índice par en R: debemos tener en cuenta que el radicando no debe ser negativo,

En símbolos:

Si n es par, en $\sqrt[n]{a}$ debe ser $a \geq 0$

Esta consecuencia, aunque parezca totalmente inocente, **es de suma importancia** y estará presente en muchas ocasiones, tanto en la resolución de ecuaciones irracionales, como en el tratamiento de funciones en las cuales se manejen raíces de índice par y otras cosas más...

<u>Signos</u>
Para determinar el signo del resultado de una raíz, analizaremos el índice:

- ✓ Si el **<u>índice es par</u>**,
  por supuesto con *RADICANDO NO NEGATIVO*,
  <u>la raíz siempre es positiva.</u>

- ✓ Si el **<u>índice es impar</u>**:
  - Con radicando positivo, resulta la raíz positiva
  - Con radicando negativo, tenemos una raíz negativa,

  Por lo tanto, en este caso **<u>la raíz respeta el signo del radicando.</u>**

- **<u>Potencia de exponente fraccionario</u>**

Se define así: $a^{n/p} = \sqrt[p]{a^n}$, con n y p naturales

- **<u>Algunas propiedades con Potencias y Raíces</u>**

a) Producto de potencias de igual base

El producto de dos potencias de igual base es otra potencia de la misma base, cuyo exponente es la suma de los exponentes dados.

$$a^n . a^p = a^{n+p}$$

b) Cociente de potencias de igual base

El cociente de dos potencias de igual base es otra potencia de la misma base, cuyo exponente es la resta de los exponentes dados $(a \neq 0)$.

$$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$$

c) Potencia de otra potencia.

La potencia de otra potencia es otra potencia de la misma base, cuyo exponente es el producto de los exponentes dados.

$$\left((a)^n\right)^p = a^{n.p}$$

d) Raíz de otra raíz.

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \left(a^{1/p}\right)^{1/n} = a^{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{p}} = a^{\frac{1}{n\cdot p}} = \sqrt[n\cdot p]{a}$$

La raíz de otra raíz es igual a una con el mismo radicando, cuyo índice es el producto de los índices dados.

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n\cdot p]{a}$$

<u>Ejercicio</u>:

3.1) $\dfrac{2^2.(5-3)^3.(8:4)^5}{2^4.2.\sqrt{2}} =$

<u>Practiquemos</u>:

3.1) $\dfrac{2^2.(5-3)^3.(8:4)^5}{2^4.2.\sqrt{2}} = \dfrac{2^2.(2)^3.(2)^5}{2^4.2.2^{1/2}} =$

$$= \frac{2^{2+3+5}}{2^{4+1+1/2}} = \frac{2^{10}}{2^{11/2}} = 2^{10-11/2} = 2^{9/2} = \sqrt{2^9} = \sqrt{2^8.2} = \sqrt{2^8}.\sqrt{2} = 2^4.\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$$

4. OPERACIONES COMBINADAS

Repetidas veces se nos presentan ejercicios que contienen más de una operación.
La estrategia fundamental es

$$\boxed{\text{SEPARAR EN TÉRMINOS}}$$

definida por los signos + y –

¡¡¡¡CUIDADO!!!!
¡no podemos "sobrepasar" paréntesis!

Ejercicios:

4.1) $3-5.(7+6)+2-8:4=$

4.2) $2\text{-}5[3+15:3\text{-}4.(5\text{-}2.3)^2+4].2+3=$

Resolución:

4.1)

$$3-5.(7+6)+2-8:4=$$

Esto nos indica el orden de las operaciones: debemos buscar el resultado de las operaciones definidas en cada término, para luego realizar la suma algebraica.

$$= 3\text{-}5(7+6)+2\text{-}8:4 =$$
$$= 3\text{-}5\ (13) + 2 - 2 =$$
$$= 3\text{-}\ \ 65\ \ + 2\text{-}\ 2\ \ = \mathbf{-62}$$

4.2)

$$2\text{-}5[3+15:3\text{-}4.(5\text{-}2.3)^2+4].2+3=$$

$$= 2\text{-}5[3+\ 5\ \ \text{-}4.(5\text{-}\ \ 6\ )^2+4].2+3=$$

$$= 2\text{-}5[3+\ 5\ \ \text{-}4.\ \ (\text{-}1\ )^2\ \ +4].2+3=$$

$$= 2\text{-}5[3+\ 5\ \ \text{-}4.\ \ (1)\ \ \ +4].2+3=$$

$$= 2\text{-}5[3+\ 5\ \ \text{-}\ \ \ \ 4\ \ \ \ +4].2+3=$$

$$= 2\text{-}5[\ \ \ \ \ \ \ \ 8\ \ \ \ \ \ \ \ ].2+3=$$

$$= 2\text{-}\ \ \ \ \ \ \ \ 80\ \ \ \ \ \ \ \ +3=\ \mathbf{-75}$$

5. OPERACIONES CON RADICALES

- **SUMA Y RESTA DE RADICALES**

La operatoria con radicales se asemeja a la operatoria con expresiones algebraicas, considerando al radical cono la parte literal de la expresión.

Veamos algunos <u>ejemplos</u>:

5.1) $2\sqrt[3]{2} - 8\sqrt[3]{2} + 15\sqrt[3]{2} =$

Como **<u>son radicales semejantes</u>**, por tener el mismo radical con el igual índice y radicando, podemos realizar la suma algebraica.

$$= (2 - 8 + 15)\sqrt[3]{2} = 9\sqrt[3]{2}$$

5.2) $6\sqrt{2} + 3\sqrt{8} - \sqrt{32} =$

<u>NO son radicales semejantes</u>, entonces debemos encontrar expresiones equivalentes y ver si de ese modo conseguimos radicales semejantes para poder operar.

$$6\sqrt{2} + 3\sqrt{8} - \sqrt{32} = 6\sqrt{2} + 3\sqrt{2^3} - \sqrt{2^5} = 6\sqrt{2} + 3\sqrt{2^2.2} - \sqrt{2^2.2^2.2} = 6\sqrt{2} + 3\sqrt{2^2}.\sqrt{2} - \sqrt{2^2}.\sqrt{2^2}.\sqrt{2} =$$

$$= 6\sqrt{2} + 3.2.\sqrt{2} - 2.2.\sqrt{2} = 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} =$$

Ahora si contamos con **<u>radicales semejantes</u>**, entonces podemos sumar

$$= (6 + 6 - 4)\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

5.3) $\dfrac{2}{3}\sqrt{5} + \dfrac{1}{\sqrt{5}} =$

<u>NO son radicales semejantes</u>, pero nuestra situación es más complicada que la anterior por tener el radical en el denominador.

No se trata de factorizar el radicando y extraer fuera del radical los factores necesarios para conseguir radicales semejantes, este procedimiento no ayuda…

Tenemos que tratar de eliminar ese radical del denominador.
Ese proceso se llama RACIONALIZACION.

Una vez que contemos con todos los radicales en el numerador, estaremos en condiciones de buscar un camino que nos lleve al resultado esperado.

- **RACIONALIZACION DE DENOMINADORES**

De acuerdo al denominador que se presente, la estrategia será diferente. Veamos los distintos casos:

1) <u>Radical cuadrático</u>

$$\frac{3}{2\sqrt{5}} =$$

La idea es eliminar ese radical del denominador, pero un radical cuadrático se elimina con un cuadrado. Si multiplicamos el denominador por $\sqrt{5}$, asociando convenientemente obtenemos una raíz que con el cuadrado se simplifica. Pero dividir por $\sqrt{5}$ modifica la expresión, a menos que también multiplique por lo mismo para no alterar el ejercicio planteado.

Así, $\frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}} . \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3.\sqrt{5}}{2\sqrt{5}.\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{2\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2.5} = \frac{3\sqrt{5}}{10} = \frac{3}{10}\sqrt{5}$

2) <u>Radical no cuadrático</u>

$$\frac{3x}{\sqrt[5]{4x^2a}} =$$

En este caso, la estrategia anterior no sirve porque al multiplicar por lo mismo, la raíz quinta no se simplifica con el cuadrado. Necesitamos una potencia quinta.
Esta se logra multiplicando el denominador (y también el numerador) por una raíz quinta (para poder multiplicarlas) con los factores del radical cuyos exponentes completen 5. Fijate cual es el sentido de esta elección:

$$\frac{3x}{\sqrt[5]{4x^2a}} = \frac{3x.\sqrt[5]{2^3x^3a^4}}{\sqrt[5]{2^2x^2a^1}.\sqrt[5]{2^3x^3a^4}} = \frac{3x.\sqrt[5]{2^3x^3a^4}}{\sqrt[5]{\left(2^2x^2a^1\right).\left(2^3x^3a^4\right)}} = \frac{3x.\sqrt[5]{2^3x^3a^4}}{\sqrt[5]{2^5x^5a^5}} = \frac{3x.\sqrt[5]{2^3x^3a^4}}{\sqrt[5]{\left(2xa\right)^5}} = \frac{3x.\sqrt[5]{2^3x^3a^4}}{2xa} = \frac{3\sqrt[5]{2^3x^3a^4}}{2a}$$

3) <u>Suma o resta con radical cuadrático</u>

$$\frac{7}{\sqrt{3}-4} =$$

Busquemos la forma de que aparezca en el denominador un cuadrado que afecte al radical cuadrático. Esto se consigue multiplicando el denominador (y el numerador) por la suma de los términos que figuran en el denominador (si hubiera una suma, se multiplicará por la resta de ellos).
El objetivo es lograr una suma por diferencia en el denominador, para reemplazarlo por la diferencia de cuadrados y de ese modo, poder simplificar la raíz con el cuadrado.

$$\frac{7}{\sqrt{2}-4} = \frac{7.\left(\sqrt{2}+4\right)}{\left(\sqrt{2}-4\right).\left(\sqrt{2}+4\right)} = \frac{7.\left(\sqrt{2}+4\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(4\right)^2} = \frac{7.\left(\sqrt{3}+4\right)}{2-16} = \frac{7.\left(\sqrt{3}+4\right)}{-14} = \frac{\sqrt{3}+4}{-2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}-2$$

Continuemos con nuestra **SUMA Y RESTA DE RADICALES**

5.3) $\frac{2}{3}\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}=$

Ahora racionalicemos

$$\frac{2}{3}\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{2}{3}\sqrt{5}+\frac{1.\sqrt{5}}{\sqrt{5}.\sqrt{5}}=\frac{2}{3}\sqrt{5}+\frac{1}{5}\sqrt{5}=$$

Recién podemos pensar en sumar los radicales, por ser semejantes.

$$\frac{2}{3}\sqrt{5}+\frac{1}{5}\sqrt{5}=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)\sqrt{5}=\frac{13}{15}\sqrt{5}$$

5.4) $\frac{1}{3}\sqrt[4]{2}+\sqrt[8]{4}-\frac{5}{6}\sqrt{8}=$

Busquemos radicales semejantes factorizando los radicandos…

$$=\frac{1}{3}\sqrt[4]{2}+\sqrt[8]{2^2}-\frac{5}{6}\sqrt{2^3}=\frac{1}{3}\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{2}-\frac{5}{6}\sqrt{2^2.2}=$$
$$=\left(\frac{1}{3}+1\right)\sqrt[4]{2}-\frac{5}{6}\sqrt{2^2}\sqrt{2}=\frac{4}{3}\sqrt[4]{2}-\frac{5}{6}.2\sqrt{2}=\frac{4}{3}\sqrt[4]{2}-\frac{5}{3}\sqrt{2}$$

No se pudieron sumar todos los términos por no ser todos semejantes.

- **MULTIPLICACIÓN DE RADICALES**

Para multiplicar radicales nos valdremos de la inversa de la propiedad distributiva de la radicación respecto de la multiplicación.

5.5) $\left(3\sqrt[6]{32}\right).\left(-\frac{2}{3}\sqrt[6]{16a}\right)=-3.\frac{2}{3}.\sqrt[6]{32}.\sqrt[6]{16a}=-2\sqrt[6]{32.16.a}=$

Ya multiplicamos, sigamos operando de acuerdo a lo aprendido.

$$=-2\sqrt[6]{2^5.2^4.a}=-2\sqrt[6]{2^9.a}=-2\sqrt[6]{2^9}\sqrt[6]{a}=-2\sqrt[6]{2^6.2^3}\sqrt[6]{a}=-2.2\sqrt[6]{2^3a}=-4\sqrt[6]{8a}$$

En este ejemplo vemos que **lo importante es que el índice sea el mismo**, de otra forma no hubiéramos podido "juntar" las raíces.

5.6) $\left(-5\sqrt[3]{18}\right).\left(3\sqrt{27x}\right)=$

No estamos en condiciones de multiplicar, **los radicales son de distinto índice**.

Tratemos de conseguir un mismo índice, esto se llama: *reducir a índice común*.

Si los índices son 3 y 2, sería conveniente tener en ambos radicales índice 6, que se consigue aplicando en cada radical otra raíz que con su nuevo índice nos lleve a un mismo índice.

La raíz de una raíz es otra raíz cuyo índice es el producto de los índices dados.
Por eso, conviene aplicar a la raíz cubica una raíz cuadrada y a la cuadrada una cubica, pero…
Con eso modificamos la expresión, entonces en el momento de aplicar la nueva raíz, elevamos el radicando con un exponente igual al nuevo índice, para que las acciones se compensen y no se altere el ejercicio dado.

$$\left(-5\sqrt{\sqrt[3]{18^2}}\right).\left(3\sqrt[3]{\sqrt{(27x)^3}}\right)=\left(-5\sqrt[6]{18^2}\right).\left(3\sqrt[6]{(27x)^3}\right)=$$

Ahora si podemos multiplicar

$$=-15\sqrt[6]{18^2.(27x)^3}=-15\sqrt[6]{2^2\left(3^2\right)^2.\left(3^3\right)^3.x^3}=-15\sqrt[6]{2^2.3^{13}.x^3}=-15.\sqrt[6]{2^2.3^{12}.3.x^3}=-15.3.\sqrt[6]{2^2.3.x^3}=-45\sqrt[6]{12x^3}$$

- **DIVISIÓN DE RADICALES**

En esta instancia, la idea es eliminar la raíz del denominador (racionalizando denominadores acorde al caso que se presente) y luego realizar los productos resultantes.

5.7) $\dfrac{\sqrt[3]{2a^2}}{\sqrt{6a}}=\dfrac{\sqrt[3]{2a^2}}{\sqrt{6a}}.\dfrac{\sqrt{6a}}{\sqrt{6a}}=\dfrac{\sqrt[3]{2a^2}.\sqrt{6a}}{\left(\sqrt{6a}\right)^2}=\dfrac{\sqrt[3]{2a^2}.\sqrt{6a}}{6a}=$

Ahora, a operar…

$$=\frac{\sqrt{\sqrt[3]{\left(2a^2\right)^2}}.\sqrt[3]{\sqrt{(6a)^3}}}{6a}=\frac{\sqrt[6]{\left(2a^2\right)^2(6a)^3}}{6a}=\frac{\sqrt[6]{2^2a^4.2^3.3^3a^3}}{6a}=\frac{\sqrt[6]{2^53^3a^7}}{6a}=\frac{a\sqrt[6]{2^53^3a}}{6a}=\frac{1}{6}\sqrt[6]{2^53^3a}$$

I-CAPITULO 3: Los problemas... ¡Son un problema!

1. A RESOLVER PROBLEMAS!!!

Permanentemente en la vida cotidiana se nos presentan situaciones que, de manera inconciente, resolvemos usando estrategias matemáticas. Desde pequeños armamos y desarmamos posibilidades matemáticas ante las triviales compras a la salida del colegio.
¿Por qué tengo que aprender las tablas de multiplicar? Nos preguntamos en la niñez.
Realmente no es vital en esta época, en la que mientras dormimos funciona un concierto de lucecitas a nuestro alrededor proveniente de los tantos aparatos electrónicos que forman parte de nuestra vida. Pero tener a mano en nuestra cabeza el resultado de una operación nos permite anticipar resultados, probar y ensayar con distintas estrategias hasta finalmente hallar la solución al problema planteado.

Una de las ideas a la que podemos recurrir en la resolución de problemas es:

ESCRIBO LO QUE LEO

Así, en la siguiente situación:

¿Cuál es el número que aumentado en dos unidades es igual al consecutivo del doble de dicho número?

No resultaría tan simple tratar de descubrir el número haciendo pruebas al azar.
Con la estrategia indicada, lo primero que identifico es cómo llamaré a ese número buscado.
Dada la tradición lo llamaremos x. Esta es una variable que, como tal, puede variar su valor generando diferentes resultados en la expresión que la contenga, entre ellos, el resultado esperado.
Entonces habremos encontrado el numero buscado que verifica lo enunciado.
Manos a la obra…

1º) Definimos x: número buscado
2º) **ESCRIBO LO QUE LEO**

¿Cuál es el número ______________	x
Que aumentado en dos unidades__	$x+2$
es igual_________________________	$x+2=$
al consecutivo___________________	$x+2=........+1$
del doble de_____________________	$x+2=2\cdot(........)+1$
dicho número?__________________	$x+2=2\cdot(x)+1$

Luego de esta tarea obtuvimos una ecuación que responde a la situación planteada.
Su resolución nos dará el número buscado.

Resolvamos la ecuación obtenida

$$x+2=2\cdot(x)+1$$

Su solución es $x=1$

¿1 **es el número buscado?**

Verifiquemos $1+2=2\cdot 1+1$

$3=3$

El número buscado es 1

Otra estrategia interesante es

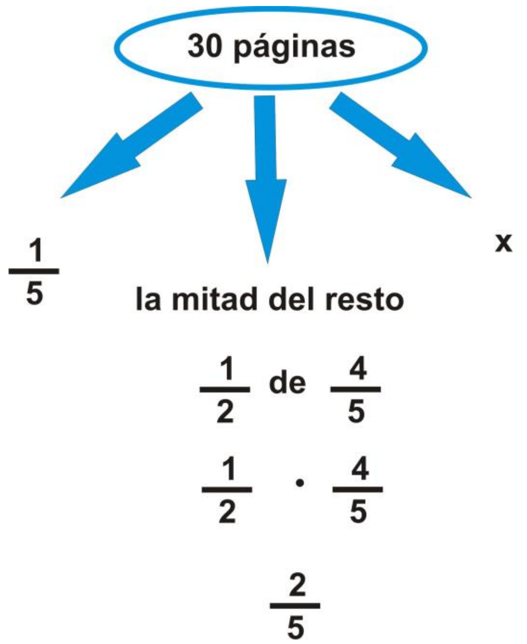
DIBUJAR

Analicemos esta cuestión.

> **Tengo tres días para terminar de leer las últimas 30 páginas del libro para el examen de idioma extranjero.**
> **Planifiqué mi tarea de la siguiente forma:**
> **El primer día leeré la quinta parte**
> **El segundo día, la mitad del resto**
> **¿Cuántas páginas deberé leer el tercer día?**

1º) Definimos x: cantidad de páginas del tercer día
2º) **DIBUJAR**

Un esquema para el problema podría ser así:



A partir de aquí surge una ecuación al indicar cómo se forman las 30 páginas.
Para obtener las 30 páginas debemos "juntar" lo leído en los tres días.

¿Podemos plantearlo así?

$$30 = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + x$$

Analizando el enunciado, $\frac{1}{5}$ y $\frac{2}{5}$ son partes de la tarea, no son páginas y si sumamos estas fracciones a x estaríamos sumando partes con cantidad de páginas.
Si quisiéramos hablar de páginas tendríamos que hallar la quinta parte del total de páginas, o sea, la quinta parte de 30 páginas, dividiremos por 5 el total de páginas, matemáticamente:

$$\frac{1}{5} \cdot 30$$

por lo cual la ecuación planteada sería $30 = \frac{1}{5} \cdot 30 + \frac{2}{5} \cdot 30 + x$

Entonces **las páginas destinadas al tercer día son 12.**

I-CAPITULO 4: Operaciones con expresiones algebraicas

1. OPERACIONES CON MONOMIOS

Monomio: expresión que consta de *coeficiente* y *parte literal*,
por ejemplo: *-5xy²* en la cual *-5 es el coeficiente* y *xy² es la parte literal*.

- **Suma y resta**

Sólo se pueden sumar aquellos *monomios* que tienen la misma parte literal (*se llaman monomios semejantes*).

Ejercicios:

1.1) $3x-2y+4xy-2x+6y+4=$

1.2) $5x - x =$

Veamos …

1.1) $3x-2y+4xy-2x+6y+4=1x+4y+4xy+4$

1.2) $5x - x = 5x - 1x = 4x$

- **Multiplicación, División, Potencia y Raíz**

A los fines de operar en forma práctica y segura, podemos pensar que el coeficiente tiene dos partes:

- ✓ Signo
- ✓ Valor absoluto (el número sin signo, es su distancia al origen)

Para realizar estas cuatro operaciones **conviene trabajar en este orden**:

1º) los Signos ***2º) los Valores absolutos*** ***3º) las Letras***

Ejercicios:

1.3) $5x^{3}.(-3x^2y).4xy=$

1.4) $(-3x^2y)^3=$

1.5) $\dfrac{-2x^5\cdot(-5x^3a^4)\cdot 3xab^2}{4a^5bx^3\cdot(-6x^2b^3)}=$

1.6) $\sqrt[5]{-32b^{10}n^5}=$

Verificá tus resultados…

1.3) $5x^{3}.(-3x^2y).4xy=-60x^6y^2$

1.4) $(-3x^2y)^3=-27x^6y^3$

1.5) $\dfrac{-2x^5\cdot(-5x^3a^4)\cdot 3xab^2}{4a^5bx^3\cdot(-6x^2b^3)}=\dfrac{30x^9a^5b^2}{-24a^5b^4x^5}=-\dfrac{5x^4}{4b^2}$

Otra forma más práctica y menos riesgosa de trabajar sería simplificar primero, lo cual nos permite manejar números más pequeños y reducir la probabilidad de error.

$$\frac{-2x^5\cdot(-5x^3a^4)\cdot 3xab^2}{4a^5bx^3\cdot(-6x^2b^3)}=\frac{-x^5\cdot\left(-5x^3a^4\right)\cdot xab^2}{2a^5bx^3\cdot\left(-2x^2b^3\right)}=\frac{5x^9a^5b^2}{-4a^5b^4x^5}=-\frac{5x^4}{4b^2}$$

De todos modos, con el uso de la calculadora, esta necesidad hoy no se ve como prioritaria. Simplificar en la multiplicación y división es una estrategia aconsejada para el trabajo manual.

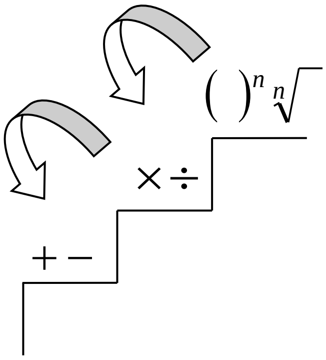
1.6) $\sqrt[5]{-32b^{10}n^5}=\sqrt[5]{-32}.\sqrt[5]{b^{10}}.\sqrt[5]{n^5}=-2b^2n$

2. LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA Y SUS APLICACIONES

Para la aplicación de la propiedad distributiva, debemos recordar la vinculación que existe entre las operaciones a través de esta propiedad.
Distribuir una operación en relación a otra es operar de otro modo según los procedimientos establecidos, obteniendo en ambos casos el mismo resultado.

i. La Multiplicación y la División son distributivas **sólo** con respecto a la Suma y a la Resta (en la división con ciertas limitaciones, ya lo vemos…)
ii. La Potencia y la Raíz son **sólo** distributivas respecto de la Multiplicación y la División. **No son distributivas con respecto a la suma ni a la resta.**

Para recordar la aplicación de la propiedad distributiva dispongamos de la siguiente imagen:



Propiedad Distributiva de la Multiplicación con respecto a la suma y a la resta

- $(a \pm b) \times c = a \times c \pm b \times c$
- $c \times (a \pm b) = c \times a \pm c \times b$
- $(a+b) \times (c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

Ejercicios:

2.1) $2x^{3}.(2x-4x^2y+3)=$

2.2) $\left(2x-5xy^3\right)(-3x^2y)=$

2.3) $(7-2x+3xy)\left(-x+5x^2+1\right)=$

Resolvamos aplicando la propiedad distributiva y operando de acuerdo al orden anterior

1º) los Signos *2º) los Valores absolutos (o sea, los números sin signo)* *3º) las Letras*

2.1) $2x^{3}.(2x-4x^2y+3)=\left(2x^3\right).\left(2x\right)+\left(2x^3\right).\left(-4x^2y\right)+\left(2x^3\right).\left(3\right)=4x^4-8x^5y+6x^3$

2.2) $\left(2x-5xy^3\right)(-3x^2y)=\left(2x\right)\left(-3x^2y\right)+\left(-5xy^3\right)\left(-3x^2y\right)=-6x^3y+15x^3y^4$

2.3)

$$(7-2x+3xy)\left(-x+5x^2+1\right)=$$
$$=(7)(-x)+(-2x)(-x)+(3xy)(-x)+(7)\left(5x^2\right)+(-2x)\left(5x^2\right)+(3xy)\left(5x^2\right)+(7)(1)+(-2x)(1)+(3xy)(1)=$$
$$=-7x+2x^2-3x^2y+35x^2-10x^3+15x^3y+7-2x+3xy=(7x-2x)+(2x^2+35x^2)-3x^2y-10x^3+15x^3y+7+3xy=$$
$$=5x+37x^2-3x^2y-10x^3+15x^3y+7+3xy$$

Limitaciones en la distributiva de la División

SOLO ES VÁLIDA LA SIGUIENTE POSIBILIDAD

$$(a \pm b) \div c = a \div c \pm b \div c$$

Aquí planteamos contraejemplos
para los casos con sumas o restas en el divisor:

1. $$20 \div (5-4) \neq 20 \div 5 - 20 \div 4$$
$$20 \div 1 \neq 4-5$$
$$20 \neq -1$$

2. $$(40+20) \div (5-4) \neq 40 \div 5 - 40 \div 4 + 20 \div 5 - 20 \div 4$$
$$60 \div 1 \neq 8 - 10 + 4 - 5$$
$$60 \neq -3$$

- Entonces, la distributiva de la **División** tiene una sola opción:

$$(a \pm b) : c = a : c \pm b : c$$

O sea: $$\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$$

Esto nos muestra que si una fracción tiene por numerador una suma o resta,

"Se puede distribuir el denominador en cada uno de los términos del numerador" **.**

Ejercicios: Distribuí la división y operá

2.4) $$\frac{3-8x}{2} =$$

2.5) $$\frac{2x^3+6x^4y}{-2x^2} =$$

2.6) $$\frac{6x^2+5xy-1}{-2x^2} =$$

Fijate

2.4) $$\frac{3-8x}{2} = \frac{3}{2} - \frac{8x}{2} = \frac{3}{2} - \frac{4x}{1} = \frac{3}{2} - 4x$$

2.5) $$\frac{2x^3+6x^4y}{-2x^2} = \frac{2x^3}{-2x^2} + \frac{6x^4y}{-2x^2} = -x - 3x^2y$$

2.6) $$\frac{6x^2+5xy-1}{-2x^2} = \frac{6x^2}{-2x^2} + \frac{5xy}{-2x^2} + \frac{-1}{-2x^2} = -3 - \frac{5}{2}x^{-1}y + \frac{1}{2}x^{-2} = -3 - \frac{5y}{2x} + \frac{1}{2x^2}$$

Errores Habituales… ☹

Ejercicio:

Elegir la opción que corresponde al resultado de cada operación
y explicar porque las otras no son válidas:
(Se supone que las variables representan números positivos)

a. $2(3x)=$

1) $6.2x=12x$ 2) $6x$ 3) $23x$

b. $\dfrac{12(4x^2)}{2}=$

1) $6.2x^2=12x^2$ 2) $\dfrac{124x^2}{2}=62x^2$ 3) $24x^2$

c. $\dfrac{3x-6xy}{x}=$

1) $3-6y$ 2) $3-6xy$ 3) $\dfrac{-3y}{x}$

d. $3x:(x+1)=$

1) $3+3x$ 2) $\dfrac{3x}{x+1}$ 3) $\dfrac{3x}{1x}=3$

e. $\dfrac{(3x)^2}{(2xy)^2}=$

1) $\dfrac{9x^2}{4x^2y^2}=\dfrac{9}{4}y^{-2}=\dfrac{9}{4y^2}$ 2) $\dfrac{3x}{2xy}=\dfrac{3}{2y}$ 3) $\dfrac{3x^2}{2xy^2}=\dfrac{3x}{2y^2}$

f. $(5-x)^2=$

1) $25-x^2$ 2) $25+x^2$ 3) $25-10x+x^2$

g. $\sqrt{64a^2b^2-4a^2}=$

1) $2a\sqrt{16b^2-1}$ 2) $8ab-2a$ 3) $\sqrt{60b^2}$

h. $\sqrt{81a^2m^2}-\sqrt{a^2}=$

1) $\sqrt{81m^2}$ 2) $9am-a$ 3) $9m$

i. $\dfrac{\sqrt{4x}}{\sqrt{x}}=$

1) 4 2) 2 3) $\sqrt{3x}$

j. $\dfrac{2x-\sqrt{3x}}{\sqrt{3}}=$

1) $2x-\sqrt{x}$ 2) $2x\sqrt{3}-x$ 3) $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}x-\sqrt{x}$

Respuestas y justificación:

a. $2(3x) = 6x$ **Opción correcta 2)**

1) $6.2x = 12x$ $\boxed{2)\ \ 6x}$ 3) $23x$

1) Es incorrecto pues *distribuye la multiplicación en la multiplicación* que NO VALE. Cuando nos pedían que diéramos el resultado de 2.3.4, nuestra respuesta sería:
   - (2.3).4=6.4=24 asociativa de la multiplicación.
   - 2.(3.4)=2.12=24 asociativa de la multiplicación.
   - 2.4.3=(2.4).3=8.3=24 conmutativa y asociativa de la multiplicación.

   Por lo que vemos,

   Cuando se presentan **multiplicaciones sucesivas**,
   la idea es **"ELEGIR" los factores** que nos parece conveniente multiplicar primero
   y luego operar.

2) Es correcto, multiplica según el orden indicado anteriormente:+.+=+;2.3=6;x. **Es 6x**
3) Es incorrecto por haberse suprimido paréntesis habiendo un producto, que no se realizó.

b. $\dfrac{12(4x^2)}{2} =$ **Opción correcta 3)**

1) $6.2x^2 = 12x^2$ 2) $\dfrac{124x^2}{2} = 62x^2$ $\boxed{3)\ \ 24x^2}$

1) Es incorrecto pues *distribuye la división en la multiplicación* que NO VALE.
   Al pedirnos el resultado de $\dfrac{20.15}{5}$, podríamos responder:
   - $\dfrac{300}{5} = 60$ producto de los factores del numerador, dividido el denominador.
   - $4.15 = 60$ se dividió 20:5 y luego se multiplicó por 15.
   - $20.3 = 60$ se dividió 15:5 y luego se multiplicó 20 por el resultado obtenido.

   Por lo que vemos,

   En el caso de **multiplicaciones y divisiones simultaneas**,
   podemos **"ELEGIR" las operaciones** que nos parece conveniente realizar primero
   y luego operar.

2) Es incorrecto por haberse suprimido paréntesis habiendo un producto, que no se realizó.
3) Es correcto, "elige" 12:2=6 y luego multiplica por $6.4x^2 = 24x^2$

c. $\dfrac{3x-6xy}{x}=$

Opción correcta 1)

1) $\boxed{3-6y}$ 2) $3-6xy$ 3) $\dfrac{-3y}{x}$

1) <u>Es correcto</u>, distribuye la división en la resta $\dfrac{3x-6xy}{x}=\dfrac{3x}{x}-\dfrac{6xy}{x}=3-6y$
2) <u>Es incorrecto</u> pues "*<u>distribuye" mal</u>* la división en la resta.
A veces en ese caso parece que hubiera simplificado con resta en el numerador, que NO VALE.

Así,

NO SE PUEDE simplificar con sumas o restas en el numerador y/o denominador.

3) <u>Es incorrecto</u> por *haber restado mal* los términos del numerador.

d. $3x:(x+1)=$ **Opción correcta 2)**

1) $3+3x$ 2) $\boxed{\dfrac{3x}{x+1}}$ 3) $\dfrac{3x}{1x}=3$

1) <u>Es incorrecto</u>, pues *<u>distribuye mal</u>* la división en la resta, que está en el divisor.
2) <u>Es correcto</u> *no se puede distribuir la división con una resta en el denominador*.
3) <u>Es incorrecto</u> por haber *sumado términos no semejantes* en el denominador.

e. $\dfrac{(3x)^2}{(2xy)^2}=$

Opción correcta 1)

1) $\boxed{\dfrac{9x^2}{4x^2y^2}=\dfrac{9}{4}y^{-2}=\dfrac{9}{4y^2}}$ 2) $\dfrac{3x}{2xy}=\dfrac{3}{2y}$ 3) $\dfrac{3x^2}{2xy^2}=\dfrac{3x}{2y^2}$

1) <u>Es correcto</u>, distribuye la potencia en la multiplicación y opera.
2) <u>Es incorrecto</u> pues *<u>simplifica exponentes del numerador y denominador</u>*, que <u>NO VALE</u>.

Concluimos que,

NO SE PUEDE simplificar exponentes ni índices presentes en el numerador y el denominador. Las <u>simplificaciones</u> se realizan en los casos de <u>operaciones inversas</u>: *sumas y restas, multiplicaciones y divisiones, potencias y raíces*.

3) <u>Es incorrecto</u> porque elimina paréntesis, sin realizar las potencias indicadas.

f. $(5-x)^2 =$ **Opción correcta 3)**

1) $25-x^2$ 2) $25+x^2$ 3) $\boxed{25-10x+x^2}$

1) <u>Es incorrecto</u>, distribuye la potencia en la resta, que NO VALE.
2) <u>Es incorrecto</u> pues distribuye la potencia en la resta, que NO VALE.

Entonces…

¡¡ATENCION!!
La <u>potencia</u> y la <u>raíz</u>
<u>NO SON distributivas</u> respecto de la <u>suma</u> y la <u>resta</u>.
Sólo distribuyen en la multiplicación y en la división.

3) <u>Es correcto</u> porque piensa el cuadrado como producto de dos factores iguales, realiza la propiedad distributiva y opera.

$$(5-x)^2 = (5-x).(5-x) = 25-5.x-x.5+x.x = 25-10x+x^2$$

Existe un procedimiento práctico que nos permite resolver más rápidamente

<u>EL CUADRADO DE UNA SUMA O UNA RESTA</u>.

Veamos...

$$(a+b)^2 = (a+b).(a+b) = a.a+a.b+b.a+b.b = a^2+2ab+b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2 = (a-b).(a-b) = a.a+a.(-b)+(-b).a+(-b).(-b) = \mathrm{a}^2-2ab+b^2$$

$$(a-b)^2 = \mathrm{a}^2-2ab+b^2$$

El **<u>cuadrado de un binomio</u>** resulta en un **<u>trinomio cuadrado perfecto</u>**

<u>Binomio .</u>
Expresión formada por **dos** monomios.

<u>Cuadrado de un binomio</u>
$(a\pm b)^2$
<u>Trinomio Cuadrado Perfecto</u>
$a^2 \pm 2ab+b^2$

<u>Ejercicios</u>: Desarrollar las potencias indicadas

2.7) $(3+w)^2 =$

2.8) $(4x-2k)^3 =$ *<u>Sugerencia</u>: usar* $a^3 = a^2.a$

Respuestas:

2.7) $(3+w)^2 = 3^2 + 2.3.w + w^2 = 9 + 6w + w^2$

2.8) $(4x-2k)^3 = (4x-2k)^2.(4x-2k) = (16x^2 - 16xk + 4k^2).(4x-2k) =$
$= 64x^3 - 32x^2k - 64x^2k + 32xk^2 + 16xk^2 - 8k^3 = 64x^3 - 96x^2k + 48xk^2 - 8k^3$

---

g. $\sqrt{64a^2b^2 - 4a^2} =$

Opción correcta 1)

$\boxed{1)\quad 2a\sqrt{16b^2-1}}$ 2) $8ab - 2a$ 3) $\sqrt{60b^2}$

1) Es correcto, pues saca factor común 4 a^2 luego distribuye la raíz en el producto.

2) Es incorrecto *no se puede distribuir la raíz en una resta*.

3) Es incorrecto por haber *restado términos no semejantes*.

h. $\sqrt{81a^2m^2} - \sqrt{a^2} =$

Opción correcta 2)

1) $\sqrt{81m^2}$ $\boxed{2)\quad 9am - a}$ 3) $9m$

1) Es incorrecto, por haber *restado términos no semejantes*.

2) Es correcto.

3) Es incorrecto por haber *restado términos no semejantes*.

i. $\dfrac{\sqrt{4x}}{\sqrt{x}} =$

Opción correcta 2)

1) 4 $\boxed{2) \quad 2}$ 3) $\sqrt{3x}$

1) Es incorrecto, por haber *simplificado el símbolo radical*.

2) Es correcto.

3) Es incorrecto por haber *restado numerado y denominador*.

j. $\dfrac{2x-\sqrt{3x}}{\sqrt{3}} =$

Opción correcta 3)

1) $2x-\sqrt{x}$ 2) $2x\sqrt{3}-x$ $\boxed{3) \quad \frac{2}{3}\sqrt{3}x-\sqrt{x}}$

1) Es incorrecto, por haber *simplificado* $\sqrt{3}$ *con resta*.

2) Es incorrecto. No distribuye correctamente el denominador en la resta, pues en el primer término multiplica por $\sqrt{3}$ en lugar de dividir por $\sqrt{3}$.

3) Es correcto racionaliza y distribuye correctamente.

3. EL FACTOR COMÚN

A la hora de trabajar con las propiedades que vinculan las operaciones, vimos que si se nos presenta una expresión del siguiente tipo:

$$c \times (a+b) =$$

Podemos aplicar la **propiedad distributiva** del producto con respecto a la suma, así:

$$c \times (a+b) = c \times a + c \times b \qquad \textbf{(1)}$$

Pero todos sabemos que si decimos que $m=t$ entonces podemos decir que $t=m$.
Luego, si decimos

$$c \times (a+b) = c \times a + c \times b\,,$$

entonces podemos decir

$$c \times a + c \times b = c \times (a+b) \qquad \textbf{(2)}$$

Analicemos el primer miembro de **(2)**:
Tenemos dos términos y en cada uno se evidencia una multiplicación por un mismo número (c). A ese número que multiplica se llama **factor** y ese factor pertenece a ambos términos, o sea, es **común** a ellos (de ahí el nombre de factor común).
Ahora estudiemos el segundo miembro de **(2)**:
Encontramos ese **factor común** que multiplica a la suma ($a+b$), lo que nos permite detallar el siguiente procedimiento:

"Sacar factor común"

Sea la expresión $\quad c \times a + c \times b =$

1) Separo en términos

$$\overbrace{c \times a} + \overbrace{c \times b} = \qquad \text{Tenemos dos términos}$$

2) Detecto un factor que esté presente en todos los términos

"c" es el factor común

3) Multiplico y divido por ese número que detecté como factor común

$$c \times a + c \times b =$$

$$= \frac{c}{c} \times (c \times a + c \times b) =$$

4) Asocio convenientemente para distribuir el divisor en la suma

$$= \frac{c \times (c \times a + c \times b)}{c} =$$

$$= c \times \left(\frac{c \times a + c \times b}{c} \right) =$$

$$= c \times \left(\frac{c \times a}{c} + \frac{c \times b}{c} \right) =$$

5) Simplifico en cada término

$$= c \times (a+b)$$

Esta es la expresión resultante que muestra en el segundo miembro, un producto en el cual uno de los factores es el factor común "c":

$$c \times a + c \times b = c \times (a+b)$$

Ejercicios:

3.1) Sacar factor común en la siguiente expresión $10x - 24y + 2 =$

3.2) Encontrar el binomio al cuadrado que origina el siguiente trinomio $-2x^2 + 6x - \frac{9}{2}$

Sugerencia: usar previamente la estrategia de factor común

Resolución:

3.1) Sacar factor común en la siguiente expresión $10x - 24y + 2 =$

1) Separo en términos $10x - 24y + 2 =$ Tenemos tres términos

2) Detecto un factor que esté presente en todos los términos: “2” es el factor común

3) Multiplico y divido por ese número que detectamos como factor común

$$10x - 24y + 2 = \frac{2}{2} \times (10x - 24y + 2) =$$

4) Trabajo convenientemente para distribuir el divisor en la suma

$$= \frac{2 \times (10x - 24y + 2)}{2} = 2 \times \left(\frac{10x - 24y + 2}{2} \right) = 2 \times \left(\frac{10x}{2} - \frac{24y}{2} + \frac{2}{2} \right) =$$

5) Simplifico en cada término $= 2x(5x - 12y + 1)$

$$\boxed{\text{Finalmente: } \quad 10x - 24y + 2 = 2 \times (5x - 12y + 1)}$$

3.2) Encontrar el binomio al cuadrado que origina el siguiente trinomio $-2x^2 + 6x - \frac{9}{2}$

Esto se restringe a la búsqueda de dos cuadrados perfectos.

Si analizamos la parte literal, los candidatos a ser cuadrados perfectos son $-2x^2$ y $-\frac{9}{2}$

Aquí un inconveniente: *Ninguno de los dos es un cuadrado porque ambos son negativos.*

Entonces sacamos **factor común** -1

$$-2x^2 + 6x - \frac{9}{2} = -1 \cdot \left(2x^2 - 6x + \frac{9}{2} \right)$$

Ahora sí, los cuadrados perfectos podrían ser: $2x^2$ y $\frac{9}{2}$. Las bases serían: $\sqrt{2}x$ y $\frac{3}{\sqrt{2}}$

Pero ellas son “poco amigables”.

Para evitar el tratamiento con radicales, que no es demasiado alegre, podemos usar una estrategia bastante interesante: ***forzar el factor común*.**

Decimos ***forzar*** porque naturalmente no surge una expresión que se pueda determinar rápidamente como factor en los tres términos.

Elegimos “2” como el nuevo factor común para manejarnos sólo con x^2 como cuadrado perfecto y así encontrar en forma natural su base: x

$$-2x^2 + 6x - \frac{9}{2} = -1 \cdot \left(2x^2 - 6x + \frac{9}{2} \right) = -1 \cdot \left[2 \cdot \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} \right) \right] = -2 \cdot \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} \right)$$

- Los dos cuadrados perfectos: x^2 y $\frac{9}{4}$, sus bases: x y $\frac{3}{2}$.
- Un doble producto de las bases: $2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} = 3x$ que es el otro término.

Como el doble producto es negativo, proviene de una resta al cuadrado

Luego $$-2x^2 + 6x - \frac{9}{2} = -2 \cdot \left(x - \frac{3}{2} \right)^2$$

expresión bastante más simple que la de radicales, la cual no dejaba de ser correcta...

4. PRODUCTOS ESPECIALES

Veamos los siguientes productos:

- $(a-b)(a+b)$ Diferencia por suma
- $(a+b)(a-b)$ Suma por diferencia
- $(a+b)(a+b)=(a+b)^2$ Suma al cuadrado: Cuadrado de un Binomio
- $(a-b)(a-b)=(a-b)^2$ Diferencia al cuadrado: Cuadrado de un Binomio

Apliquemos la propiedad distributiva en los cuatro productos:

- $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ Diferencia de Cuadrados
- $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ Diferencia de Cuadrados
- $(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$ Trinomio Cuadrado Perfecto

  $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2$ Trinomio Cuadrado Perfecto

  $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

Veamos los procedimientos:

- $(a-b)(a+b)=a.a+a.b-b.a-b.b=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$ *cancelando opuestos*
- $(a+b)(a-b)=(a-b)(a+b)=a^2-b^2$
- $(a+b)(a+b)=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)(a-b)=(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

Ejercicios:

4.1) Escribir la suma algebraica resultante de los siguientes productos especiales.

a) $(3-2x)(3+2x)=$

b) $(2m^2+5a)(2m^2-5a)=$

c) $(4+2m)^2=$

d) $\left(\frac{5}{3}x-2x^2\right)^2=$

e) $\left(2a-\frac{1}{2}na\right)^2=$

Respuestas:

a) $(3-2x)(3+2x)=9-4x^2$

b) $(2m^2+5a)(2m^2-5a)=4m^4-25a^2$

c) $(4+2m)^2=16+16m+4m^2$

d) $\left(\frac{5}{3}x-2x^2\right)^2=\frac{25}{9}x^2-\frac{20}{3}x^3+4x^4$

e) $\left(2a-\frac{1}{2}na\right)^2=4a^2-2a^2n+\frac{1}{4}n^2a^2$

5. FACTORIZACION

Esta metodología busca transformar sumas algebraicas en expresiones cuya operación principal sea el producto (por eso su nombre, conseguir factores como elementos principales).
Se hace muy útil en la resolución de ecuaciones o en ciertos manejos algebraicos.

a) Usando el ***factor común*** obtenemos una expresión factorizada.
b) Otro caso que permite factorizar rápidamente es el hallazgo de una ***diferencia de cuadrados*** que deriva en la suma por la diferencia de sus bases.
c) Teniendo un ***Trinomio Cuadrado Perfecto*** será necesario encontrar el binomio al cuadrado que lo generó para factorizar la expresión, pues un cuadrado es el producto de dos expresiones iguales.

Ejercicios:

5.1) Determinar si los siguientes trinomios son trinomios cuadrados perfectos y en caso afirmativo escribir el cuadrado del binomio que los originó, factorizando la expresión.

a) $9m^2 + 25 - 30m$ b) $12 + 4h^2 + 1$

Resolución:

5.1) Determinar si el siguiente trinomio es trinomio cuadrado perfecto y en caso afirmativo escribir el cuadrado del binomio que lo originó, factorizando la expresión.

a) $9m^2 + 25 - 30m$

Para detectar si es trinomio cuadrado perfecto debo encontrar

- Dos cuadrados perfectos: $9m^2$ y 25
- Un doble producto de las bases: las bases son $3m$ y 5.
  El doble producto $2.3m.5 = 30m$ que es el otro término.
  Como el doble producto es negativo, proviene de una resta al cuadrado

Luego es un trinomio cuadrado perfecto.
Un binomio al cuadrado que lo origina es $(3m-5)^2$

Importante:

Un trinomio cuadrado perfecto cuyo doble producto es negativo tiene asociados dos binomios cuyos cuadrados coinciden con él:
La diferencia de las bases en los dos sentidos posibles.

Así: $9m^2 + 25 - 30m = (3m-5)^2 = (5-3m)^2$

b) $12 + 4h^2 + 1$

- Dos cuadrados perfectos: $4h^2$ y 1
- El doble producto $2.2h.1 = 4h$ no es el otro término.

$\boxed{\textit{Luego NO es un TRINOMIO CUADRADO PERFECTO.}}$

I-CAPITULO 5: Cosas Prohibidas… Restricciones en la operatoria matemática

1. COCIENTES

Veamos la definición de división: $a : b = c \Leftrightarrow c.b = a$, con c **único**.

No es posible dividir por cero.

Trabajemos "por el absurdo", o sea tratando de dividir por cero. Entonces pienso que **b=0**

- Consideremos que $a \neq 0$
  Si $a : 0 = c \Rightarrow c.0 = a$.
  De este razonamiento se desprende que $0 = a$ pues $c.0 = 0$.
  Pero entonces ***a=0***, **ABSURDO** pues dijimos que $a \neq 0$.

- Parecería que con a=0 tendría que funcionar
  Sea *a=0*
  Aplicando la definición $0 : 0 = c \Rightarrow c.0 = 0$ igualdad que es cierta para todo c real.
  Si pensamos que $c = 78$, por ejemplo, podríamos decir que $0 : 0 = 78$,
  o bien $0 : 0 = -\sqrt{5}$, si nuestro valor de $c = -\sqrt{5}$.
  Lo cual es un **ABSURDO** nuevamente porque c era único de acuerdo a la definición (**0:0 está indeterminado**).

El **ABSURDO** proviene de suponer que b=0, por lo tanto se confirma que en el cociente $\boxed{\frac{a}{b}, b \neq 0}$

2. RAICES DE INDICE PAR

Al analizar el signo de las raíces de acuerdo al índice, según sea par o impar, se detecta que no es posible hallar en el conjunto de los números reales el resultado de una raíz de índice par y radicando negativo.

NO EXISTE en R el valor de $\sqrt[n]{a}$, siendo n par y a negativo

Luego en el cálculo de raíces de índice par en R: debemos tener en cuenta que el radicando no debe ser negativo.

En símbolos: Si *n* es par, en $\sqrt[n]{a}$ debe ser $a \geq 0$

El radicando de raíces de índice par, no puede ser negativo.

3. LOGARITMOS

Hay otras situaciones en que también existen imposibilidades, por ejemplo en el cálculo de logaritmos. Lo enunciaremos, aunque este tema lo abordaremos más adelante.

Dado $\log_b a$, debe ser *a>0, b>0* y $b \neq 1$

El argumento de un logaritmo debe ser mayor que cero (con base positiva y distinta de 1).

Resumiendo:

1) *Cocientes* ………………. $\frac{a}{b}$ debe ser $\boxed{b \neq 0}$

2) *Raíces de índice par* …… Si n es par, en $\sqrt[n]{a}$ debe ser $\boxed{a \geq 0}$

3) *Logaritmos* ………… Dado $\log_b a$, debe ser $\boxed{a>0,\ b>0 \text{ y } b \neq 1}$

Ejercicios:

1.1) Analizar para que valores de *x* estas expresiones tienen resultado real

a) $\dfrac{2x+3}{x+2}$

b) $2+\sqrt{x}$

c) $\dfrac{5}{\sqrt{x-1}}$

Analicemos las imposibilidades operatorias…

a) $\dfrac{2x+3}{x+2}$ Si el denominador se anula tenemos problemas, luego pedimos que $x \neq -2$

Dicho de otro modo, $\underline{x \in R - \{-2\}}$

b) $2+\sqrt{x}$ En este caso *x* no puede tomar valores negativos, o sea $x \geq 0$

Diremos que $\underline{x \in R^{+} \cup \{0\}}$

c) $\dfrac{5}{\sqrt{x-1}}$ Debe cumplirse simultáneamente que

- $\sqrt{x-1} \neq 0$
  La metodología que usaremos cuando se nos plantea una expresión con $\neq$ es trabajar con el = y luego negar los resultados obtenidos, así:
  $$\begin{array}{ccc} \sqrt{x-1} \neq 0 & \rightarrow & \sqrt{x-1} = 0 \\ & & x-1=0 \\ x \neq 1 & \leftarrow & x=1 \end{array}$$

- $x-1 \geq 0$
  $x \geq 1$

Como debe ser $x \geq 1$ y al mismo tiempo $x \neq 1$, concluimos que $x \rangle 1$.
Lo cual indica que si consideramos cualquier valor que “se escape” de lo indicado, la operación no estará definida en R.
Por ejemplo para *x*=-2, será el radicando igual a -2-1=-3,
y no es posible efectuar la raíz cuadrada de dicho número.

Será entonces $\underline{x \in R / x > 1}$

I-CAPITULO 6: Igualdades y desigualdades

1. LAS IGUALDADES

Hemos visto desde el comienzo varias veces la expresión $a = b$

En la relación de igualdad de números se verifican tres propiedades que usamos sin darnos cuenta:

I. La igualdad de números es Reflexiva

Todo número es igual a sí mismo

Simbólicamente: $\forall a \in R : a = a$

II. La igualdad de números es Simétrica

Si un número es igual a otro, éste es igual al primero.

Simbólicamente: $\forall a \in R, \forall b \in R, a = b \Rightarrow b = a$

III. La igualdad de números es Transitiva

Si un número es igual a otro y éste es igual a un tercero,
el primero es igual al tercero.

Simbólicamente: $\forall a \in R, \forall b \in R, \forall c \in R, (a = b \wedge b = c) \Rightarrow a = c$

2. LAS DESIGUALDADES

Existen distintos tipos de desigualdades

I. $a\langle b$ ....*a es menor que b*

II. $a \leq b \Leftrightarrow (a\langle b \vee a = b)$ .... *a es menor o igual que b*

III. $a\rangle b$ ....*a es mayor que b*

IV. $a \geq b \Leftrightarrow (a\rangle b \vee a = b)$ .... *a es mayor o igual que b*

En las desigualdades no se verifican las mismas propiedades que para las igualdades.
Para recurrir a una imagen, pensemos que si un número es igual a otro, están ubicados en el mismo lugar en la recta numérica.
Pero si son distintos, uno estará a la derecha del otro.

Analicemos **I.** y **III.**

I. *a es menor que b* (*a* está a la izquierda de *b*)

III. *a es mayor que b* (*a* está a la derecha de *b*)

✓ **Propiedades para la relación "… es menor que …" y "… es mayor que …":**

a) NO es Reflexiva

Simbólicamente: $\forall a \in R : a \text{ no es menor que } a$

b) NO es Simétrica

Simbólicamente:

$\forall a \in R, \forall b \in R,$ *si a es menor que b , no se verifica que b sea menor que a*

$\forall a \in R, \forall b \in R,$ *si a es mayor que b , no se verifica que b sea mayor que a*

c) Es Asimétrica

Simbólicamente: $\forall a \in R, \forall b \in R,$ *si a es menor que b* $\Rightarrow$ *b no es menor que a*

Análogamente: $\forall a \in R, \forall b \in R,$ *si a es mayor que b* $\Rightarrow$ *b no es mayor que a*

d) Propiedad Transitiva Si un número es menor que otro y éste es menor que un tercero, el primero es menor que el tercero.

Simbólicamente: $\forall a \in R, \forall b \in R, \forall c \in R, (a\langle b \wedge b\langle c) \Rightarrow a\langle c$

$\forall a \in R, \forall b \in R, \forall c \in R, (a\rangle b \wedge b\rangle c) \Rightarrow a\rangle c$

✓ **Propiedades para las relaciones "…es menor o igual que …" y "…es mayor o igual que …":**

Consideremos **II.** *a es menor o igual que b*

IV. *a es mayor o igual que b*

a) **<u>Es Reflexiva</u>**

Simbólicamente:

$\forall a \in R : a$ *es menor o igual que* a (pues $a=a$)

$\forall a \in R : a$ *es mayor o igual que* a (pues $a=a$)

b) **<u>NO es Simétrica</u>**

Simbólicamente:

$\forall a \in R, \forall b \in R,$ *si a es menor o igual que b ,*

no siempre se verifica que b sea menor o igual que a

Análogamente:

$\forall a \in R, \forall b \in R,$ *si a es mayor o igual que b ,*

no siempre se verifica que b sea mayor o igual que a

c) **<u>Es Antisimétrica</u> (que no es lo mismo que Asimétrica)**

Simbólicamente: $\forall a \in R, \forall b \in R, (a \le b \wedge b \le a) \Rightarrow a = b$

$\forall a \in R, \forall b \in R, (a \ge b \wedge b \ge a) \Rightarrow a = b$

d) **<u>Propiedad Transitiva</u>**

Si un número es menor o igual que otro y éste es menor o igual que un tercero, el primero es menor o igual que el tercero.

Simbólicamente: $\forall a \in R, \forall b \in R, \forall c \in R, (a \le b \wedge b \le c) \Rightarrow a \le c$

Si un número es mayor o igual que otro y éste es mayor o igual que un tercero, el primero es mayor o igual que el tercero.

Simbólicamente: $\forall a \in R, \forall b \in R, \forall c \in R, (a \ge b \wedge b \ge c) \Rightarrow a \ge c$

<u>Ejercicios</u>:

3.1) Escribir el conjunto *L* de todos los <u>números naturales menores que 7.</u>

3.2) Escribir el conjunto *P* de todos los <u>números enteros menores que 7.</u>

3.3) Escribir el conjunto *S* de todos los <u>números enteros positivos, menores que 7.</u>

3.4) ¿Qué elementos tiene el conjunto *T* de los *x* que verifican que $x\rangle 2 \wedge 20\rangle x$?

3.5) Determinar los elementos del conjunto *M* cuyos *x* son tales que $x\langle 5 \wedge x\rangle 8$.

3.6) Buscar el conjunto *H* incluido en Z, caracterizado por la siguiente expresión $x \ge -1 \wedge 2\langle x$.

3.7) Hallar el conjunto *G* de los números enteros *x* que verifican que $x \le 5 \vee 7 \le x$.

3.8) ¿Qué elementos que pertenecen al conjunto $V = \{x \in Z \,/\, x\rangle 2 \vee x \le 5\}$?

3.9) Busquemos el conjunto *F* incluido en Z, caracterizado por $x \ge -1 \vee 2\langle x$.

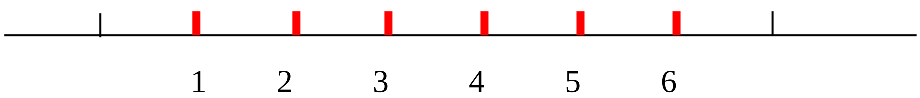
<u>Soluciones</u>:

3.1) Para determinar el conjunto *L* de todos los <u>números naturales menores que 7</u>, pensamos en el conjunto $L = \{1,2,3,4,5,6\}$

Simbólicamente

$$\boxed{L = \{x \in N \,/\, x\langle 7\}}$$

Gráficamente



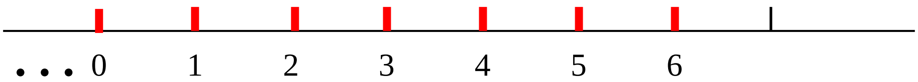
3.2) Si en lugar de trabajar en N, trabajamos en Z, por ejemplo con el conjunto P, tendremos todos los números enteros de la recta numérica, que se encuentran a la izquierda de 7.

Lo expresamos simbólicamente

$$P = \{x \in Z \,/\, x < 7\}$$

La diferencia es el conjunto en que están incluidos sus elementos (*Z* en lugar de *N*), pero en cuanto a la cantidad de elementos que poseen, L tiene 6 elementos, P infinitos.

Gráficamente



Entonces el conjunto *P*, por extensión (o sea, detallando todos sus elementos uno a uno) sería algo parecido a esto: $P = \{6,5,4,3,2,1,0,-1,-2,-3,-4,-5,\ldots\}$

Ciertamente este conjunto <u>no se puede escribir por extensión</u> porque no se pueden detallar todos sus elementos, por ser una cantidad infinita. La licencia de los "*puntos suspensivos*" indica que los elementos del conjunto son, uno tras otro, los que le siguen a -5 según la secuencia anterior lo indique (en este caso, hacia la izquierda de la recta numérica). Convengamos que no es una notación rigurosa, pero a los efectos de identificar sus elementos, nos permitimos escribirlo bajo esta modalidad.
Como es un conjunto, sus elementos se pueden detallar en cualquier orden.
Con el objeto de manejar una estructura que coincida con la representación gráfica sobre la recta numérica, una expresión más apropiada sería:

$$\boxed{P = \{\ldots,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}}$$

3.3) Si quisiéramos trabajar en Z y obtener el conjunto $S = \{1,2,3,4,5,6\}$, vemos que no nos alcanza con indicar los números enteros menores que 7, tendríamos que limitar el conjunto, porque con esta consideración contamos con infinitos elementos y el conjunto pedido tiene sólo seis.
Podríamos escribir $S = \{x \in Z \,/\, x < 7 \wedge x > 0\}$

Para vincular estas dos expresiones usamos el conector "y" que indica "simultaneidad", porque los números en cuestión son mayores que cero y al mismo tiempo menores que siete, su símbolo es "$\wedge$".
La expresión obtenida $x < 7 \wedge x > 0$
se puede escribir $x > 0 \wedge x < 7$
y también $0 < x \wedge x < 7$
Como se verifica la transitividad de la relación "… es menor que …", es decir:
Si $0 < x$ y $x < 7 \Rightarrow 0 < 7$ que es una expresión verdadera,
podemos escribir la **"expresión condensada"** $0 < x < 7$
El conjunto del que estamos hablando es:

$$\boxed{S = \{x \in Z \,/\, 0 < x < 7\} = \{1,2,3,4,5,6\}}$$

S es el conjunto de los enteros comprendidos entre 0 y 7, excluidos éstos.

3.4) ¿Podemos expresar en “forma condensada” las desigualdades: $x \rangle 2 \wedge 20 \rangle x$?

Veamos:

$$x \rangle 2 \wedge 20 \rangle x \text{ entonces } 20 \rangle x \wedge x \rangle 2$$

Aplicando la transitividad de la relación “… es mayor que …”:

Si $20 \rangle x$ y $x \rangle 2 \quad \Rightarrow 20 \rangle 2$ lo cual es válido.

Por eso podemos escribir la **“expresión condensada”**

$$20 \rangle x \rangle 2$$

Luego

$$\boxed{T = \{ x \in R / 20 \rangle x \rangle 2 \} = \{19,18,17,16,15,14,13,12,11,10,9,8,7,6,5,4,3\}}$$

3.5) Estudiemos los elementos de *M*.

Debemos poner atención en este punto porque

no siempre se puede escribir una expresión condensada,

dadas dos desigualdades vinculadas con “y”.

Veamos si en este caso podemos escribir el conjunto *M* usando una desigualdad en “forma condensada”.

$$M = \{ x \in Z / x \langle 5 \wedge x \rangle 8 \}$$

Trabajando con la metodología anterior, la expresión dada

$$x \langle 5 \wedge x \rangle 8$$

se puede escribir $\quad x \rangle 8 \wedge x \langle 5$

y también $\quad 8 \langle x \wedge x \langle 5$

Dijimos que la relación “… es menor que …” verifica la transitividad.

$8 \langle x$ y $x \langle 5 \quad \Rightarrow 8 \langle 5$ **ABSURDO**

Buscamos un x que verifique simultáneamente: $8 \langle x$ y $x \langle 5$.

No existe ningún número que sea menor que 5 y al mismo tiempo mayor que 8.

Es **ABSURDO** que un número sea simultáneamente menor que 5 y mayor que 8.

En este caso **no podemos escribir** la “expresión condensada”: $8 \langle x \langle 5$ es un **ABSURDO**

En nuestro ejemplo,

al querer *vincular los extremos* de la expresión $8 \langle x \wedge x \langle 5$ *mediante la transitividad*, detectamos que ella *no se cumple*, pues 8 NO ES MENOR QUE 5.

Podemos decir que el conjunto

$$\boxed{M = \phi}$$

Continuaremos con las <u>Resoluciones</u> trabajando con OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS.

✓ ***<u>OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS</u>***

Cuando trabajamos con desigualdades, es muy útil valerse de las operaciones entre conjuntos:

UNION ($\cup$) e **INTERSECCION** ($\cap$),

relacionadas con las operaciones lógicas:

DISYUNCION ($\vee$) y **CONJUNCION** ($\wedge$) respectivamente

O sea,

la "ó" y **la "y".**

3.3) Trabajemos con el conjunto

$$S = \{x \in Z \,/\, x \langle 7 \wedge x \rangle 0\}$$

En él se evidencia la **CONJUNCION** de dos expresiones.

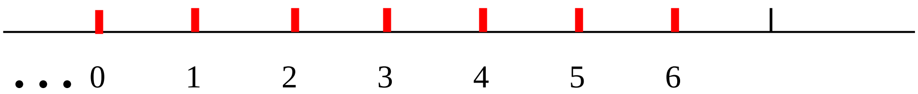
Recordemos la definición de **INTERSECCION** de conjuntos.

$$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \in B\} \qquad \mathbf{(1)}$$

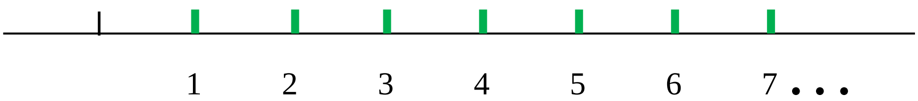
Los elementos de $A \cap B$ son los que pertenecen "simultáneamente" a los dos conjuntos.
Por esta razón asociamos la <u>conjunción lógica</u> a la <u>intersección de conjuntos</u>.

El conjunto S se puede caracterizar mediante $x \in Z \,/\, x \langle 7 \quad \wedge \quad x \in Z \,/\, x \rangle 0$
Sean los conjuntos $A = \{\ x \in Z \,/\, x \langle 7\ \}$ y $B = \{\ x \in Z \,/\, x \rangle 0\ \}$
Atentos a la definición **(1)**, los elementos de S responden a la intersección de A y B.

Representemos gráficamente $A = \{\ x \in Z \,/\, x \langle 7\ \}$ con rojo



y $B = \{\ x \in Z \,/\, x \rangle 0\ \}$ con verde



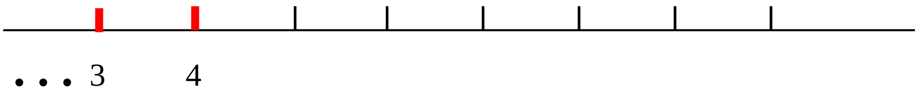
S contiene los elementos que son "simultáneamente" rojos y verdes: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

> Una pauta gráfica para
> la **INTERSECCION** de dos conjuntos
> es encontrar los elementos que
>
> **ESTAN PINTADOS DE <u>AMBOS COLORES A LA VEZ</u>**

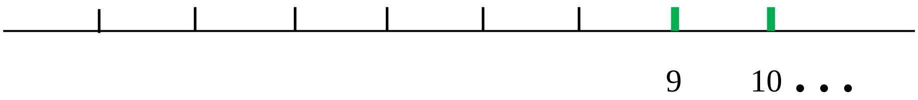
3.5) Ahora representemos gráficamente el siguiente conjunto

$$M = \{x \in Z / x\langle 5 \wedge x\rangle 8\}$$

$x \in Z / x\langle 5$ con rojo



y $x \in Z / x\langle 8$ con verde



Pensemos en la INTERSECCION por estar vinculadas las condiciones mediante una “y”. Vemos que <u>no existen</u> elementos que sean “simultáneamente” rojos y verdes.

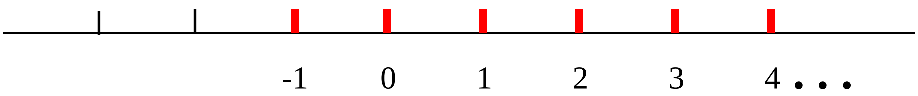
Por lo cual

$$\boxed{M = \phi}$$

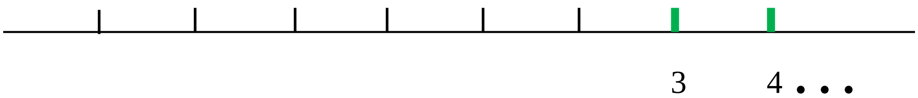
3.6) Busquemos el conjunto *H* incluido en Z, caracterizado por los *x* tales que $x \geq -1 \wedge 2\langle x$.

La forma más práctica de trabajar es gráficamente.

$x \in Z / x \geq -1$ con rojo



Graficar los $x \in Z / 2\langle x$, es equivalente a graficar $x \in Z / x\rangle 2$, lo haremos con verde



Los elementos <u>pintados de ambos colores a la vez</u> son los números enteros mayores que 2. Simbólicamente:

$$\boxed{H = \{x \in Z / x\rangle 2\} = \{3, 4, 5, 6, 7 ...\}}$$

3.7) Hallemos el conjunto *G* de los números enteros *x* que verifican que $x \leq 5 \vee 7 \leq x$.

Tengamos en cuenta que el conector lógico presente no es la “y” ($\wedge$) sino la “ó” ($\vee$).

Entonces usamos la definición de **UNION** de dos conjuntos:

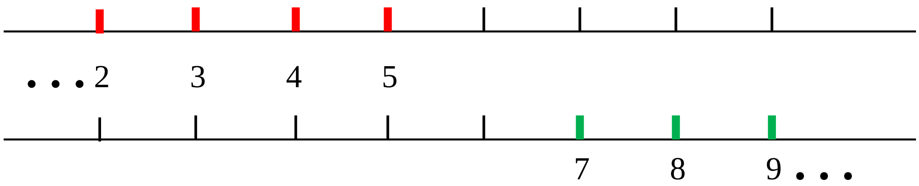
$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\} \qquad \textbf{(2)}$$

$A \cup B$ está compuesto por los elementos de al menos alguno de los dos conjuntos.
Dado que la **DISYUNCION** utilizada en la definición **(2)** de unión no es exclusiva, **puede darse la simultaneidad**.
Esto significa que si algún elemento pertenece a los dos conjuntos *A* y *B* simultáneamente, no contradice el hecho de pertenecer a alguno de ellos, por ej. a *A*, entonces pertenece a la unión.

Por lo visto, ahora asociamos la <u>disyunción lógica</u> a la <u>unión de conjuntos</u>.

Volviendo a nuestro ejercicio:

$$x \le 5 \vee 7 \le x$$



El conjunto solución es

$$\boxed{G = \{..., 2,3,4,5\} \cup \{7,8,9,..\} = \{..., 2,3,4,5,7,8,9,..\}}$$

La pauta gráfica para
la **UNION** de dos conjuntos
es encontrar los elementos que

<u>**ESTAN PINTADOS**</u> (no importa de qué color).

Dicho de otra forma

$$\boxed{G = Z - \{6\}}$$

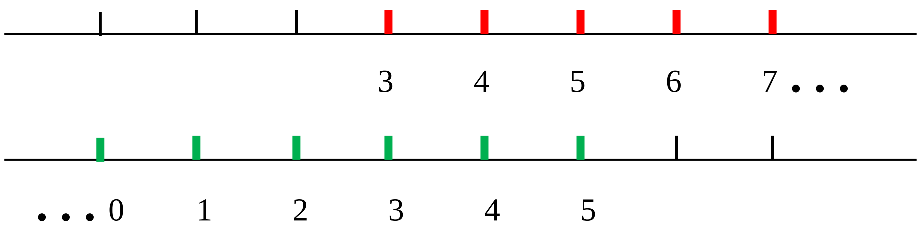
Aquí surge una nueva operación entre conjuntos que es la **DIFERENCIA** entre conjuntos que definimos como sigue:

$$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$$

Por eso, G se puede escribir usando esta operación

$$\boxed{G = Z - \{6\} = \{x \in Z / x \ne 6\}}$$

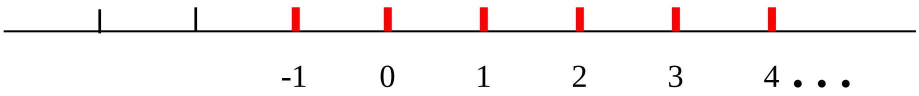
3.8) ¿Qué elementos que pertenecen al conjunto $V = \{x \in Z / x \rangle 2 \vee x \le 5\}$?



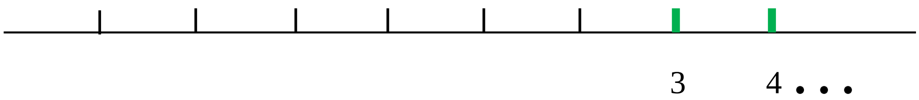
Se ve que <u>lo pintado</u> es todo el conjunto Z, porque se trata de una unión.
Luego

$$\boxed{V = Z}$$

3.9) Busquemos el conjunto F incluido en Z, caracterizado por $x \geq -1 \vee 2\langle x$.
Ya hemos trabajado con estas desigualdades, pero vinculadas por “y”, lo que ahora se propone es vincularlas con “ó” $x \in Z / x \geq -1$ con rojo



Graficar el conjunto de los $x \in Z / 2\langle x$, es graficar los $x \in Z / x\rangle 2$ con verde



Los elementos pintados son los enteros mayores o iguales a -1, o bien, los mayores que -2.
Simbólicamente: $F = \{x \in Z / x \geq -1\} = \{x \in Z / x > -2\}$

$$\boxed{F = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \ldots\}}$$

Si pensamos en las desigualdades indicadas anteriormente, pero manejándonos **en R**, necesitaremos la definición de INTERVALO.

✓ **INTERVALOS**

Los intervalos son “porciones” de la recta real.
Pueden tener diferentes características, de acuerdo a que *sus extremos pertenezcan o no a ellos*.
Pueden ser *acotados o no acotados*.

Veamos sus definiciones:

- **INTERVALO ABIERTO de extremos a y b:**
  se designa (a, b) $\qquad (a,b) = \{x \in R / a\langle x\langle b\}$

- **INTERVALO CERRADO de extremos a y b:**
  se designa $[a, b]$ $\qquad [a,b] = \{x \in R / a \leq x \leq b\}$

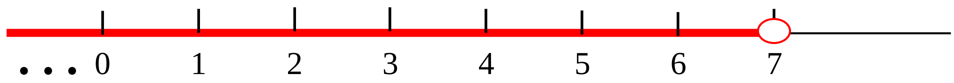
- **INTERVALO SEMIABIERTO de extremos a y b**
  - **SEMIABIERTO A IZQUIERDA (ó SEMICERRADO A DERECHA):**
    se designa $(a, b]$ $\qquad (a,b] = \{x \in R / a\langle x \leq b\}$
  - **SEMIABIERTO A DERECHA (ó SEMICERRADO A IZQUIERDA):**
    se designa $[a, b)$ $\qquad [a,b) = \{x \in R / a \leq x\langle b\}$

- **INTERVALO NO ACOTADO:**
  - **NO ACOTADO A IZQUIERDA, CERRADO A DERECHA:**
    se designa $(-\infty, b]$ $\qquad (-\infty,b] = \{x \in R / x \leq b\}$
  - **NO ACOTADO A IZQUIERDA, ABIERTO A DERECHA:**
    se designa $(-\infty, b)$ $\qquad (-\infty,b) = \{x \in R / x\langle b\}$
  - **NO ACOTADO A DERECHA, CERRADO A IZQUIERDA:**
    se designa $[a, +\infty)$ $\qquad [a,+\infty) = \{x \in R / x \geq a\}$
  - **NO ACOTADO A DERECHA, ABIERTO A IZQUIERDA:**
    se designa $(a, +\infty)$ $\qquad (a,+\infty) = \{x \in R / x\rangle a\}$

3.2) Sea el siguiente conjunto $C=\{x\in R / x\langle 7\}$

Se trata de todos los números reales menores que 7,
o sea, todos los que se encuentran a la izquierda de 7, sin incluirlo.

Gráficamente



El conjunto C tiene infinitos elementos,
pero a diferencia de $P=\{x\in Z / x\langle 7\}$ que maneja la misma desigualdad, pero en Z,
estos elementos no son puntos aislados.

Estamos hablando de conjuntos que no están formados por elementos aislados, al contrario, entre dos elementos m y t del conjunto, siendo $m\langle t$, existen infinitos elementos.
Porque entre dos números reales, siempre hay otro.
Y entre este nuevo y uno de los anteriores, otro más, y así indefinidamente…
A esa característica se llama *densidad* del conjunto R.

Es decir,

Un conjunto se dice ***denso*** si entre dos elementos distintos cualesquiera perteneciente a él, siempre existe otro de este mismo conjunto.

Nuestro conjunto C es el intervalo no acotado a izquierda, de extremo derecho abierto 7:

$$\boxed{C=(-\infty,7)}$$

Ejercicios:
Escribir cada conjunto como intervalo o unión de intervalos y representalo en la recta numérica.

4.1) $D=\{x\in R / x\langle 7 \wedge x\rangle 0\}$

4.2) $E=\{x\in R / x\geq -1 \wedge 2\langle x\}$

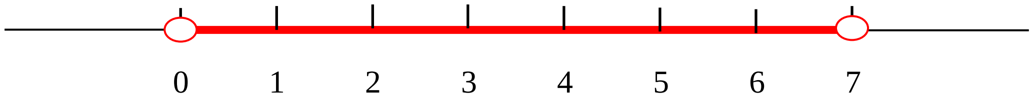
4.3) $W=\{x\in R / x\leq 5 \vee 7\leq x\}$

4.4) $I=\{x\in R / x\geq -1 \vee 2\langle x\}$

Aquí, las **respuestas**:

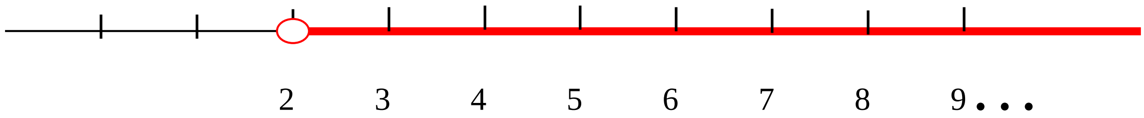
4.1) $D = \{x \in R / x\langle 7 \wedge x\rangle 0\} = (0,7)$

Gráficamente



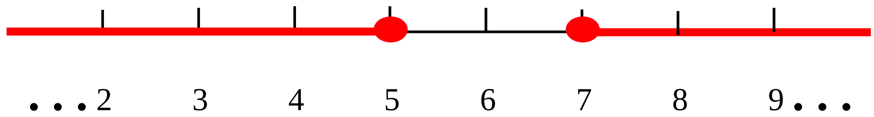
4.2) $E = \{x \in R / x \geq -1 \wedge 2\langle x \ \} = (2,+\infty) = R - (-\infty,2]$

Gráficamente



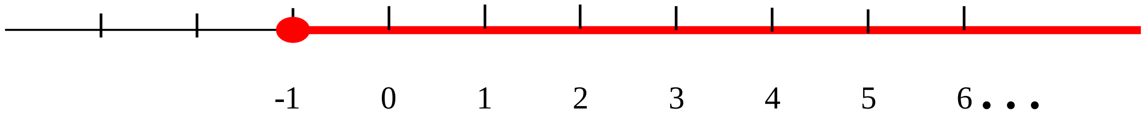
4.3) $W = \{x \in R / x \leq 5 \vee 7 \leq x \ \} = (-\infty,5] \cup [7,+\infty) = R - (5,7)$

Gráficamente



4.4) $I = \{x \in R / x \geq -1 \vee 2\langle x \ \} = [-1,+\infty) = R - (-\infty,-1)$

Gráficamente



PARTE II

ECUACIONES e INECUACIONES

CAPITULO 1: Las ecuaciones

CAPITULO 1: Las ecuaciones

1. Ecuaciones con las cuatro operaciones fundamentales
   La Ley Uniforme
   Distintas estrategias
2. Ecuaciones racionales
   Las restricciones
   Distintas estrategias
3. Ecuaciones con potencias y raíces
   Las restricciones
   Distintas estrategias
4. Ecuaciones cuadráticas
   Tipo de ecuaciones y sus resoluciones
   El discriminante
   Carácter de las raíces
5. Ecuaciones irracionales
   Las restricciones
   Raíces extrañas

II-CAPITULO 1: Las ecuaciones

1. ECUACIONES CON LAS CUATRO OPERACIONES ELEMENTALES.

Una ecuación es una igualdad en la cual figuran variables (letras) que representan números. Lo que se espera es conocer el valor de esas letras (**soluciones o raíces** de la ecuación) para que la igualdad sea válida.

Solución o raíz de una ecuación:
Es un número que **verifica la ecuación**, o sea, al reemplazar *x* por ese valor, se obtiene el mismo resultado en ambos miembros.

Por ejemplo: x+3=5 sólo se verifica para x=2.
Luego diremos que la solución de la ecuación es 2 y se escribe S={2}.

Existe una **"tradición estudiantil"** que nos lleva a resolver ecuaciones **"pasando"** los términos, factores, divisores, etc., "de un lado al otro del igual", o sea, de un miembro al otro.

En realidad

Nada **"pasa"** caminando de un miembro al otro

La idea de "pasar" surge de la búsqueda de:

-) el neutro aditivo (*cero*) en el caso de sumas,
operando en ambos miembros con el inverso aditivo (*opuesto*)
o
-) el neutro multiplicativo (*uno*) si tenemos productos,
operando con el inverso multiplicativo (*recíproco*).

- Veamos cómo: $x-2+3=5$ **(1)**

Si quisieramos eliminar el -2, tenemos que sumar su opuesto (inverso aditivo) +2 a ambos miembros para obtener otra igualdad equivalente a la dada.

x-2+3+2=5+2
x-2+2+3=5+2 propiedad conmutativa de la suma

Como -2+2=0 (neutro aditivo), resulta

$$x+0+3=5+2$$
$$x+3=5+2 \qquad \textbf{(2)}$$

Observemos los pasos **(1)** y **(2)** .

$$x-2+3=5 \qquad \textbf{(1)}$$
$$x+3=5+2 \qquad \textbf{(2)}$$

Parecería que el 2 que estaba restando en **(1)**, **"pasó"** sumando al otro miembro en **(2)**.

Claro, nosotros sabemos que **"no pasó"** pero para muchos resulta simpático decirlo así y quizás pensarlo, para hacer de esta ciencia algo más *amigable*. Pero no permitamos que estas cosas que nos divierten, nos lleguen a confundir, el sustento matemático de este proceso es la

Ley Uniforme

<u>Ley Uniforme</u>

- **Para la suma**

Si a ambos miembros de una igualdad le sumamos un mismo número, seguimos obteniendo una igualdad.

En símbolos:

$$\forall a \in R, \forall b \in R, \forall m \in R, \quad a = b \Rightarrow a + m = b + m$$

- ✓ **Para la resta**

Si a ambos miembros de una igualdad le restamos un mismo número, seguimos obteniendo una igualdad.

En símbolos:

$$\forall a \in R, \forall b \in R, \forall m \in R, a = b \Rightarrow a - m = b - m$$

- **Para la multiplicación**

Si multiplicamos ambos miembros de una igualdad por un mismo número, seguimos obteniendo una igualdad.

En símbolos:

$$\forall a \in R, \forall b \in R, \forall m \in R, a = b \Rightarrow a.m = b.m$$

- **Para la división**

Si dividimos ambos miembros de una igualdad por un mismo número no nulo, seguimos obteniendo una igualdad.

En símbolos:

$$\forall a \in R, \forall b \in R, \forall m \in R, m \neq 0, a = b \Rightarrow a : m = b : m$$

Debemos tener en cuenta las consideraciones necesarias para que la división tenga sentido (*m no nulo, o sea m distinto de cero*).

- **Para la potencia**

Si elevamos ambos miembros de una igualdad a una misma potencia natural, seguimos obteniendo una igualdad.

En símbolos:

$$\forall a \in R, \forall b \in R, \forall m \in N, a = b \Rightarrow a^m = b^m$$

- **Para la radicación**

Si aplicamos a ambos miembros de una igualdad la raíz m-ésima, seguimos obteniendo una igualdad.

En símbolos:

$$\forall a \in R, \forall b \in R, \forall m \in N, a = b \Rightarrow \sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}$$

(Proceso que no estará definido para m par y radicandos negativos.)

- Veamos este ejemplo:

$$3x = 5 \qquad \textbf{(3)}$$

Si buscamos eliminar el 3, debemos dividir ambos miembros por 3

$$\frac{3x}{3} = \frac{5}{3}$$

Simplificamos en el miembro de la izquierda el 3 del numerador con el del denominador.

$$1 \cdot x = \frac{5}{3}$$

$$x = \frac{5}{3} \qquad \textbf{(4)}$$

Mirando **(3)** y **(4)**,

$$3x = 5 \qquad \textbf{(3)}$$

$$x = \frac{5}{3} \qquad \textbf{(4)}$$

parecería que el 3 que estaba multiplicando, **"pasó"** dividiendo, pero no fue así.
Estos son efectos de la aplicación de la **Ley Uniforme** .

- ¿Y con la siguiente ecuación?

$$2 - 5x + 4 = 7 - 20x$$

$$6 - 5x = 7 - 20x$$

Queremos eliminar el 6**, aplicamos la Ley Uniforme.**

Como cada número tiene su signo (+ ó -) adelante

Entonces para eliminar el 6, o sea el +6, debemos restar 6 a ambos miembros, así:

$$6 - 5x - 6 = 7 - 20x - 6$$

Cancelando +6 con -6
y
aplicando nuevamente la ley uniforme para eliminar -20x del miembro de la derecha

resulta:

$$-5x + 20x = 1 - 20x + 20x$$

$15x = 1$ y ahora otra vez la Ley Uniforme, dividiendo ambos miembros por 15

$$\frac{15x}{15} = \frac{1}{15}$$

$$x = \frac{1}{15}$$

Haremos un <u>esquema</u> que a veces es útil para resolver ecuaciones.

*Aplicando la **Ley Uniforme***   *debemos ir transformando la igualdad dada en expresiones equivalentes,*   *hasta obtener una que evidencie el valor de la incógnita.*

Al resolver ecuaciones

ECUACIONES

Surge **la pregunta:**

<u>¿Qué elimino primero?</u>

Ésta se responde con **otra pregunta:**

<u>Cuál es la operación principal?</u>

Porque lo que se elimina primero
es lo que está "afectado" por la
operación principal.

Pero esa *operación principal*
se detecta cuando

<u>SEPARO EN TERMINOS</u>

Como la separación en términos
sólo se puede realizar,
si existen sumas o restas,
tenemos dos posibilidades:

PUEDO
separar en términos

En este caso
la *operación principal* será la
<u>suma o resta</u>

$+ \quad -$

Y debo eliminar
algo que esté **<u>sumando o restando</u>**

NO PUEDO
separar en términos

En este caso
la *operación principal* será la
<u>multiplicación, división, potencia o raíz</u>

$\times \quad \div \quad (\ )^n \quad \sqrt[n]{\ }$

Y debo eliminar
algo que esté **<u>multiplicando o dividiendo.</u>**
O bien, tendré en cuenta **<u>potencia o raíz</u>**

Ejercicios: *A resolver!!*

5.1) $3 = 5.2 + x.2$

5.2) $5 \cdot \left(3 - \frac{2}{5}y\right) = 21$

Resolución:

5.1) $3 = 5.2 + x.2$

Posible resolución

$$3 = 10 + x.2$$
$$3 - 10 = x.2$$
$$\frac{-7}{2} = x$$

5.2) $5 \cdot \left(3 - \frac{2}{5}y\right) = 21$

Podemos trabajar de cualquiera de estas dos maneras:

a) Aplicando la propiedad distributiva

b) Despejando directamente la "*y*", o sea,
Eliminando mediante la Ley Uniforme todos los números,
con el objetivo de dejar "sola" la "*y*" en el miembro de la izquierda.

a) Aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la resta.

$$5 \cdot \left(3 - \frac{2}{5}y\right) = 21 \Rightarrow 5 \cdot 3 - 5 \cdot \frac{2}{5}y = 21 \Rightarrow 15 - 2y = 21$$

Al separar en términos vemos que en el miembro de la izquierda tenemos dos términos:

-) uno que tiene "*y*",

-) otro que no tiene "*y*".

Nuestra intención es dejar sola la "*y*" (por ejemplo en el miembro de la izquierda).

Entonces el 15 y el 2 me molestan.

A la pregunta inicial: ***¿qué elimino primero?***

Le siguió la pregunta: ***¿cuál es la operación principal?***

De acuerdo con lo que vimos recién, la operación principal sería **suma o resta**

porque ***PUDE*** separar en dos términos.

Como dijimos que dejaríamos sola la "*y*" en el miembro de la izquierda, eliminaremos el 15

$$15 - 2y = 21 \Rightarrow 15 - 2y - 15 = 21 - 15 \Rightarrow -2y = 6$$

La estrategia siempre es ***separar en términos*** (en el miembro donde veo la "*y*")
y al hacerlo, nos damos cuenta de que

NO PUDE separar en dos ó más términos, sólo hay uno.

Luego **No hay nada sumando ni restando!!**

El 2 está **multiplicando** (debido a que ***NO PUDE*** separar en términos) y su signo es negativo (lo tiene adelante) así que aplicando la ley uniforme, dividimos ambos miembros por -2

$$\frac{-2y}{-2} = \frac{6}{-2} \Rightarrow y = -3$$

$$S = \{-3\}$$

b) Despejando

Una receta interesante es que **siempre que figure sólo una vez la incógnita** (en nuestro caso "*y*") es posible **despejar** y llegar fácilmente a la solución.

$$5\cdot\left(3-\frac{2}{5}y\right)=21$$

Me molestan el 5, el 3 y el 2/5.
A la pregunta inicial: ***¿qué elimino primero?***
Le sigue la pregunta: ***¿cuál es la operación principal?***
De acuerdo con lo visto, ***separo en términos***
detectando que la operación principal es la **multiplicación**
porque ***NO PUDE*** separar en dos ó más términos.

El 5 está multiplicando, dividimos ambos miembros por 5

$$5\cdot\left(3-\frac{2}{5}y\right)=21\Rightarrow\frac{5\cdot\left(3-\frac{2}{5}y\right)}{5}=\frac{21}{5}\ \Rightarrow\ 3-\frac{2}{5}y=\frac{21}{5}\quad\textbf{(5)}$$

Volvemos a ***separar en términos*** y determinemos cuál es la operación principal.

Como ***PUEDO*** separar en términos,
vemos que la operación principal es la suma o la resta.
Nuestra intención es dejar sola la *"y"* en el miembro de la izquierda,
Por lo cual eliminaremos el 3,
consideramos la suma como operación principal

$$-\frac{2}{5}y=\frac{21}{5}-3\ \Rightarrow\ -\frac{2}{5}y=\frac{6}{5}$$

Volvemos a intentar la separación en términos
y como ***NO PUEDO*** separar en términos
la operación principal es la multiplicación.

$$y=\frac{6}{5}:\left(-\frac{2}{5}\right)\ \Rightarrow\ y=-3 \qquad \text{Luego} \qquad S=\{-3\}$$

b1) Otra forma:

Ubiquémonos en el paso **(5)** de nuestra ecuación

$$3-\frac{2}{5}y=\frac{21}{5}$$

Si la idea es no quedarnos con términos negativos que contengan incógnitas, la película es otra. En lugar de elegir dejar sola la "*y*" en el miembro de la izquierda, podemos elegir ubicar el término que contiene "*y*" en el otro miembro, así:

$$3=\frac{21}{5}+\frac{2}{5}y$$

Continuando con la resolución podemos obtener $S=\{-3\}$, que era lo esperado.

De acuerdo con lo visto hasta ahora, podemos encontrar hasta ahora dos usos vitales de la

SEPARACION EN TERMINOS

En los **ejercicios combinados** sirve para determinar la prioridad de las operaciones.

En las **ecuaciones** sirve para detectar la operación principal.

Ejercicio:

5.3) Tengamos en cuenta la siguiente expresión

$$\frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{10}x + \frac{1}{10}x - x^2$$

Si tuvieras que cancelar un par de elementos de ella ¿cuál sería la opción correcta?

1) x^2 con $-x^2$
2) $-\frac{1}{10}x$ con $\frac{1}{10}x$
3) $\frac{1}{10}$ con $-\frac{1}{10}$

Respuesta:

La respuesta correcta es la 2)

¿Por qué?

Porque luego de separar en términos nos damos cuenta de que la *operación principal* es la suma y/o la resta, y en los otros ítems los elementos propuestos para cancelar están mutiplicando…

Entonces puedo pensar que :
$-\frac{1}{10}x + \frac{1}{10}x = 0$, que es lo mismo que cancelarlos.

Como $-\frac{1}{10}x$ es el opuesto de $+\frac{1}{10}x$ (son inversos aditivos), su suma es cero (el neutro aditivo), por eso se pueden cancelar.

Ejercicios: *A resolver!!*

5.4) $(5x+3)(4-2x)=0$
5.5) $x = 5x - 10$

Resolvamos:

5.4) $(5x+3)(4-2x)=0$

(i) A varios se les ocurrirá aplicar la **propiedad distributiva**
(ii) Otros usarán la **Ley Uniforme** para que alguno de los dos factores figure en el otro miembro
(iii) Y he visto a otros recurrir a la estrategia ***a.b=0***

Dediquémonos a cada una de ellas.

(i) Aplicando la **propiedad distributiva**

$$(5x+3)(4-2x)=0$$
$$20x-10x^2+12-6x=0$$
$$-10x^2+14x+12=0$$

Estamos en el campo de las *ecuaciones completas de segundo* grado, que son expresiones igualadas a cero que cuentan con *tres términos*:

- ✓ uno de grado 2 (la incógnita está elevada al cuadrado)
- ✓ otro de grado uno (la incógnita no tiene exponente)
- ✓ un término independiente (sin incógnita)

que ya vamos a abordar.
Entonces, con los elementos que hasta ahora tenemos, este rumbo no nos conviene.

(ii) Aplicando la **Ley Uniforme**

Si la idea es tener en cuenta que 5*x*+3 está multiplicando y aplicamos la Ley Uniforme, dividiremos por 5*x*+3, por lo cual habrá que tener en cuenta las **restricciones,** pediremos que 5*x*+3 no sea cero.

> El tratamiento de los *divisores distintos de cero* se suele trabajar a partir de la negación de la condición (o sea, analizando qué ocurriría si ese divisor fuera cero) y excluyendo luego los valores obtenidos. Con esta modalidad se evitan errores en los procedimientos, definiendo con mayor certeza las restricciones. Veamos cómo…

RESTRICCIONES

$$5x+3\neq 0 \rightarrow 5x+3=0$$
$$5x=-3$$
$$x\neq -\frac{3}{5} \quad \leftarrow \quad x=-\frac{3}{5}$$

> Nótese que **la flecha** en la resolución de las restricciones **no es una implicación**

$$4-2x=\frac{0}{5x+3} \qquad \textbf{(1)}$$
$$4-2x=0 \Rightarrow -2x=-4 \Rightarrow x=\frac{-4}{-2}$$
$$x=2 \qquad \textbf{(2)}$$

Podemos decir que 2 es solución.

Pero esta situación ocurre mientras 5x+3 no es cero, *¿qué pasaría si 5x+3 fuera cero?*
Si miramos las restricciones, podríamos preguntar de modo equivalente …
¿qué pasaría si x fuera igual a -3/5?

Reemplacemos x por $-\frac{3}{5}$ en el enunciado.

$$(5x+3)(4-2x)=0$$

$$\left(5.\left(-\frac{3}{5}\right)+3\right).\left(4-2.\left(-\frac{3}{5}\right)\right)=0 \qquad \textbf{(3)}$$

$$(\ -3\ +3)\ .\ (\ 4+\ 6/5\ )\ =0$$

$$0\ .\ 26/5\ =0$$

$$0=0$$

Vemos que -3/5 también es solución

Luego podemos decir que la solución planteada a partir de **(1)** es válida, siempre que 5x+3 no sea cero
(de lo contrario, estaríamos dividiendo por cero: <u>situación prohibida</u>).

Esta resolución quedaría completa si después del paso **(2)** nos preguntamos:
¿Y si 5x+3=0? o sea, ¿qué ocurre si x=-3/5?
Entonces reemplazamos en la ecuación original (ver **(3)**)
y al confirmar que se verifica la ecuación, diremos que -3/5 también es solución.

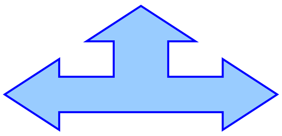
Tenemos $S=\left\{-\frac{3}{5};2\right\}$

(iii) <u>Situación ***a.b=0***</u>

Pensemos en el producto de dos factores que dan cero.
Si se multiplican dos factores, sólo dará cero si alguno de los dos es cero.

Entonces la forma de trabajar sería

$$(5x+3)(4-2x)=0$$

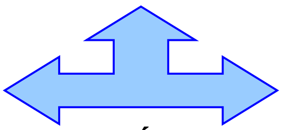


$5x+3=0$	ó	$4-2x=0$
$5x=-3$	ó	$-2x=-4$
$x=-\frac{3}{5}$	ó	$x=2$

Luego

$$S=\left\{-\frac{3}{5};2\right\}$$

Esta estrategia
a.b=0



a =0 **ó** **b =0**
<u>es brillante, simple y efectiva!!</u>

5.5) $x = 5x - 10$

Si elegimos mantener las incógnitas en el miembro de la derecha, debemos eliminar la *x* del primer miembro.
Separemos en términos en el miembro de la izquierda, porque es el miembro del cual voy a elegir el elemento a eliminar.

NO PUEDO separar en términos

la operación principal parece no ser la suma ni la resta.

En esta situación podemos pensar dos cosas:

1) *x* está sumando a cero
2) *x* está multiplicando a 1

1) Si pensamos que *x* está sumando a cero,

$$0 + x = 5x - 10$$
$$0 = 5x - 10 - x$$
$$0 + 10 = 5x - x$$
$$10 = 4x$$
$$\frac{5}{2} = x \text{, entonces } S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$$

2) Podríamos considerar que *x* está multiplicando a uno,

$$x.1 = 5x - 10$$

Vemos que la operación principal en el primer miembro es la multiplicación.
En consecuencia, si queremos eliminar la *x* tendríamos que dividir ambos miembros por *x*

$$1 = \frac{5x - 10}{x}$$

Generando así una complicación mayor, que se debe a las restricciones a plantear:
Como *x* está en el denominador, **no puede ser cero.**

RESTRICCIONES

$x \neq 0$

.
Por eso, tomar este camino es complicarnos más de la cuenta, pero es posible.

$$1 = 5 - \frac{10}{x} \Rightarrow 1 - 5 = \frac{-10}{x} \Rightarrow -4 = \frac{-10}{x} \Rightarrow 4 = \frac{10}{x}$$

Y en este punto volvemos a plantearnos que la x en el denominador no nos conviene, porque dada nuestra tarea de buscar su valor, se busca una expresión del tipo x=… en la cual x figura en el numerador.

$$4 = \frac{10}{x} \Rightarrow 4x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{4} \Rightarrow x = \frac{5}{2} \text{, siendo } S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$$

Por lo que hemos visto, tanto en la opción **(ii)** del ejercicio 5.4) como en la opción **2)** del 5.5), no es conveniente trabajar con incógnitas en el denominador, por eso…

Una buena estrategia es siempre conseguir que las incógnitas estén en el numerador.

2. ECUACIONES RACIONALES.

Este tipo de ecuaciones son aquellas en las que la incógnita figura en el denominador.

Ejercicios: *A resolver las ecuaciones racionales!!*

5.6) $\dfrac{3x^2}{x} = 0$

5.7) $\dfrac{3}{x} = 5$

5.8) $\dfrac{7-2x}{4x-1} = 0$

5.9) $20 \div (5x+4) = 2$

5.10) $5 - \dfrac{2x}{4-2x} = \dfrac{-5x^2}{4-x^2} + \dfrac{x+1}{x+2}$

Resoluciones:

5.6) Por ejemplo $\dfrac{3x^2}{x} = 0$

Fíjense qué pasaría si simplificamos la x…

$$3x = 0 \Rightarrow \quad x = 0$$

¿La solución es cero?

Reemplacemos $x = 0$ en $\dfrac{3x^2}{x} = 0$. Estamos en un problema… dividimos por cero!!

Luego x=0 no verifica la ecuación. $S = \phi$

Por eso, cuando vamos a resolver ecuaciones racionales, hay que tener **mucho cuidado** con los denominadores.
Es lo primero que tenemos que atacar.
Debemos asegurarnos de que los denominadores no sean cero.
Hay que analizar las **RESTRICCIONES**

Una vez que sabemos cuáles son los valores de x prohibidos, si los hubiere, continuamos con la resolución de la ecuación con cautela, eso significa que al final siempre volveremos a mirar lo que surgió de las restricciones para excluir los valores prohibidos y así obtener la solución.

La resolución completa sería así:

$$\frac{3x^2}{x} = 0$$

RESTRICCIONES

$x \neq 0$

Esto queda esperando a que termine de resolver

$$3x^2 = 0.x$$

$$3x^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{0}{3}$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

MIRO **(las restricciones)**

Como x no puede ser cero, no hay valores que verifiquen la ecuación:

$$S = \phi$$

5.7) $\frac{3}{x} = 5$

Como la incógnita está en el denominador, **no puede ser cero**

<u>RESTRICCIONES</u>

$x \neq 0$

Esto queda esperando a que termine de resolver

Como la operación principal es la división, resuelvo así:

$$3 = 5.x$$

$$\frac{3}{5} = x$$

MIRO **(las restricciones)**

Como el x que se obtuvo es 3/5, x no es cero.
Entonces puedo decir que:

$$S = \left\{ \frac{3}{5} \right\}$$

5.8) $\frac{7-2x}{4x-1} = 0$

$$\boxed{\frac{a}{b} = 0 \Rightarrow a = 0 \wedge b \neq 0}$$

$$\frac{7-2x}{4x-1} = 0$$

<u>RESTRICCIONES</u>

$$4x - 1 \neq 0 \rightarrow 4x - 1 = 0$$

$$4x = 1$$

$$x \neq \frac{1}{4} \longleftarrow x = \frac{1}{4}$$

Esto queda esperando a que termine de resolver

Habíamos dicho que el numerador debía ser cero:

$$7 - 2x = 0$$
$$-2x = -7$$

$$x = \frac{7}{2}$$

MIRO **(las restricciones)**

Ahora puedo decir que la restricción no afecta para nada al valor hallado, luego:

$$S = \left\{ \frac{7}{2} \right\}$$

5.9) $20 \div (5x+4) = 2$

Para comprender mejor el ejercicio nos conviene expresar la división en forma vertical (con la raya divisoria) así:

$$\frac{20}{5x+4} = 2$$

Lo primero que hay que tener en cuenta son las restricciones.

RESTRICCIONES

$5x+4 \neq 0 \rightarrow 5x+4=0$

$5x=-4$

$x \neq -\frac{4}{5} \longleftarrow x=-\frac{4}{5}$

Esto queda esperando a que termine de resolver

Vemos que lo que está dividiendo es $5x+4$
Multiplico ambos miembros por esta suma.

$$20 = 2.(5x+4)$$
$$\frac{20}{2} = (5x+4)$$
$$10 = 5x+4$$
$$10-4 = 5x$$
$$6 = 5x$$
$$\frac{6}{5} = x$$

MIRO **(las restricciones)**

$$S = \left\{\frac{6}{5}\right\}$$

5.10) $5 - \frac{2x}{4-2x} = \frac{-5x^2}{4-x^2} + \frac{x+1}{x+2}$

RESTRICCIONES

1) $4-2x \neq 0 \rightarrow 4-2x=0$

$4 = 2x$

$x \neq 2 \longleftarrow x=2$

2) $4-x^2 \neq 0 \rightarrow 4-x^2=0$

$4 = x^2$

$x \neq 2 \wedge x \neq -2 \longleftarrow x=2 \text{ ó } x=-2$

3) $x+2 \neq 0 \rightarrow x+2=0$

$x \neq -2 \longleftarrow x=-2$

Luego $x \in R - \{-2;2\}$

Para resolver este ejercicio tenemos que recordar el procedimiento de suma y resta de fracciones, usando la estrategia de reemplazar las fracciones por fracciones equivalentes buscando igual denominador en todas ellas. Veamos cómo podemos expresar los denominadores como productos.

$$\frac{5}{1}-\frac{2x}{2(2-x)}=\frac{-5x^2}{(2-x)(2+x)}+\frac{x+1}{2+x}$$

El **común denominador** es el múltiplo común menor ($m.c.m.$) de los denominadores existentes, o sea $m.c.m.=2(2-x)(2+x)$.
Se puede conseguir realizando el producto de todos los factores con su mayor exponente.

Entonces multiplicamos el numerador y el denominador de cada fracción por el factor que le falta a su denominador para completar el *m.c.m.* así:

$$\frac{5\cdot 2(4-x^2)}{1\cdot 2(4-x^2)}-\frac{2x\cdot(2+x)}{2(2-x)(2+x)}=\frac{-5x^2\cdot 2}{(2-x)(2+x)\cdot 2}+\frac{(x+1)\cdot 2(2-x)}{(2+x)\cdot 2(2-x)}$$

$$\frac{10(4-x^2)-(4x+2x^2)}{2(4-x^2)}=\frac{-10x^2+(x+1)(4-2x)}{2(4-x^2)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también lo son:

$$10(4-x^2)-(4x+2x^2)=-10x^2+(x+1)(4-2x)$$

Aplicando la propiedad distributiva y continuando con la resolución obtenemos

Restricciones
$x\in R-\{-2;2\}$

$6=x$ MIRO **(las restricciones)**

Dado que $x\in R-\{-2;2\}$, esto no interfiere en el valor hallado.

Aseguramos que $S=\{6\}$

3. ECUACIONES CON POTENCIAS Y RAICES.

Ejercicios:

Buscá la solución de las ecuaciones que se indican

5.11) $x^2 = 4$

5.12) $\sqrt{x} = 3$

5.13) $\sqrt[3]{12x+4} = -4$

5.14) $(x-1)^2 = 4$

5.15) $(3x-2)^2 = 2x+9x^2$

Resoluciones:

5.11) $x^2 = 4$

Pensemos qué números reales verifican la ecuación…

x = 2 verifica y también *x* = -2.

Por eso NO ES CORRECTO este proceso para la resolución en R

$$x^2 = 4$$
$$x = \sqrt{4}$$
$$x = 2$$

sólo vale para el conjunto de los números naturales, donde los negativos no juegan

$$x^2 = 4$$

como el **exponente es par**,

tanto una **base positiva** como **negativa** arroja el mismo resultado, no negativo.

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$x = 2$ ó $x = -2$

La solución es S= $\{2;-2\}$

5.12) $\sqrt{x} = 3$

Como el índice es par analizo las restricciones (si fuera impar no tenemos necesidad)

RESTRICCIONES

$x \geq 0$

Esto queda esperando a que termine de resolver

Aplico la operación inversa en ambos miembros

$$x = 3^2$$

$$x = 9$$

MIRO **(las restricciones)**

La solución es S= $\{9\}$

5.13) $\sqrt[3]{12x+4} = -4$

$$12x+4=(-4)^3$$
$$12x+4=-64$$
$$12x=-64-4$$
$$x=-\frac{68}{12}$$
$$x=-\frac{17}{3} \Rightarrow S=\left\{-\frac{17}{3}\right\}$$

5.14) $(x-1)^2=4$

Podemos resolverlo de dos formas:

a) <u>Despejando x</u>

$$(x-1)^2=4$$
$$x-1=\pm\sqrt{4}$$
$$x-1=\pm 2$$

$x-1=2$ ó $x-1=-2$

$x=2+1$ $\qquad$ $x=-2+1$

$x=3$ $\qquad$ $x=-1$

La solución es $\quad$ S= $\{3;-1\}$

b) <u>Desarrollando el cuadrado del binomio</u>

$$(x-1)^2=4$$
$$x^2-2x+1=4$$
$$x^2-2x-3=0$$

Obtenemos una ecuación cuadrática completa de la que nos ocuparemos más adelante, por ahora no nos conviene…

5.15) $(3x-2)^2=2x+9x^2$

Como tenemos *<u>incógnitas en ambos miembros</u>* es probable que sea favorable desarrollar el cuadrado del binomio:

$$9x^2-12x+4=2x+9x^2$$
$$-12x+4=2x+9x^2-9x^2$$
$$-12x-2x=-4$$
$$x=\frac{2}{7} \Rightarrow S=\left\{\frac{2}{7}\right\}$$

Se evidencia que en este caso <u>convenía más desarrollar el cuadrado que despejar</u>...

4. ECUACIONES CUADRÁTICAS.

Las ecuaciones cuadráticas son del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Esta es la forma general, a los números reales “a”, “b” y “c” se los llama:

“a” coeficiente principal (o coeficiente cuadrático)
“b” coeficiente lineal
“c” término independiente.

“a” será no nulo porque si no, se anularía el primer término y no sería una ecuación cuadrática.

Por ejemplo:

I. $5x^2 + 2x + 3 = 0$ en la cual a=5
b=2
c=3

Si tomamos

II. $x^2 - 6x + 1 = 0$ diremos que a=1 pues $x^2 = 1.x^2$
b=-6
c=1

Y para esta ecuación

III. $-x^2 + 4x = x + 7$
$-x^2 + 4x - x - 7 = 0$, la idea es igualarla a cero.
$-x^2 + 3x - 7 = 0$ a=-1
b=3
c=-7

Ejercicio:

5.16) Determiná los coeficientes de las ecuaciones cuadráticas

IV. $6x^2 + 2x = 0$
V. $-5x^2 - 3 = 0$
VI. $17x^2 = 0$

Respuestas:

IV. a=6; b=2; c=0
V. a=-5; b=0; c=-3
VI. a=17; b=0; c=0

Se dice que las ecuaciones cuadráticas en las cuales el coeficiente lineal y/o el término independiente son nulos, son *ecuaciones cuadráticas incompletas*, en el caso de ser todos no nulos tenemos *ecuaciones cuadráticas completas.*

Les cuento…

- Si la ecuación es incompleta, del tipo $ax^2 + bx = 0$,
una estrategia conveniente es “**sacar factor común x”.**
- Si la ecuación es incompleta, del tipo $ax^2 + c = 0$,
la idea es “**despejar x”.**
- Si la ecuación es completa, del tipo $ax^2 + bx + c = 0$,
usaremos la “**fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado”.**
Esta fórmula nos permite que dada una ecuación de segundo grado:
$$ax^2 + bx + c = 0$$
1º) Identificamos *a*, *b* y *c*
2º) Usamos la fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

De todos modos, si la ecuación cuadrática es incompleta **se puede usar siempre la fórmula resolvente**, tomando como “cero” los coeficientes inexistentes.

¿Siempre tendrá solución (o raíz) real una ecuación de segundo grado?

La **fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado** contiene una raíz de índice par, debemos pedir que el radicando no sea negativo para obtener soluciones reales.

$$b^2 - 4ac \geq 0$$

Este radicando se llama **<u>DISCRIMINANTE</u>** y se designa en general, con la letra delta mayúscula:

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Si el discriminante es negativo, tendremos dificultades.
Las soluciones de la ecuación no son reales.

Si el discriminante es cero, $\sqrt{0} = 0$.
Sabemos que sumar cero o restar cero da igual.
Las soluciones son iguales y reales.

Pero si el discriminante es mayor que cero, sumar o restar algo no nulo no es lo mismo.
Las soluciones son reales y distintas.

Resumiendo:

El discriminante Δ asociado a una ecuación de segundo grado puede ser:

- $\Delta \rangle 0 \rightarrow$ Raíces reales distintas, diremos que obtenemos 2 **raíces simples**
- $\Delta = 0 \rightarrow$ Raíces reales iguales, diremos que obtenemos 1 **raíz doble**
- $\Delta \langle 0 \rightarrow$ Raíces no reales distintas, diremos que obtenemos **raíces complejas**

<u>Ejercicios</u>:

Resolver las siguientes ecuaciones

5.17) $\dfrac{2x}{x^2} = 1$

5.18) $4x^2 - 36 = 0$

5.19) $3(2x+1)^2 + 2 = 5$

5.20) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

5.21) $2x^2 - 10x + 12 = 0$

5.22) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

5.23) $3x - (2x-4)(4-3x) = 5 - 6x^2$

5.24) $(5x-2)\cdot(3-2x) = (x+3)\cdot(2-10x)$

5.25) $\dfrac{4x^2}{2x-3} = 5 + 2x$

5.26) $-x + 2 : (x+3) = 2 - x$

5.27) $\dfrac{x+3}{2} = 2 - x$

5.28) $2 - \dfrac{5x+1}{2x} = 2x + 1 + \dfrac{3+2x^2}{2-x}$

Respuestas:

5.17) 2 5.18) 3; -3 5.19) 0; -1 5.20) 1/3 5.21) 2; 3 5.22) 3/2 5.23) ϕ

5.24) 12/47 5.25) 15/4 5.26) -2 5.27) -1/3 5.28) $\dfrac{19+\sqrt{481}}{-10}$; $\dfrac{19-\sqrt{481}}{-10}$

Algunas resoluciones:

5.17)
$$\frac{2x}{x^2}=1$$

RESTRICCIONES

$$x^2 \neq 0 \rightarrow x^2 = 0$$
$$x = \pm\sqrt{0}$$
$$x \neq 0 \longleftarrow x = 0$$

$$2x = 1.x^2$$
$$2x - x^2 = 0$$

Obtuvimos una ecuación cuadrática incompleta del tipo $ax^2 + bx = 0$
Aplico el procedimiento para extraer ese factor común x.

$$x.(2-x) = 0$$

Usemos la estrategia a.b=0

$$x.(2-x) = 0$$

$2 - x = 0$ ó $x = 0$

$x = 2$ ó $x = 0$

MIRO **(las restricciones)**
x=o no es solución.

Por lo tanto $S = \{2\}$

5.18)
$$4x^2 - 36 = 0$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm\sqrt{9}$$

$x = 3$ ó $x = -3 \Rightarrow S = \{3,-3\}$

5.19)
$$3(2x+1)^2 + 2 = 5$$
$$3(2x+1)^2 = 3$$
$$(2x+1)^2 = 1$$
$$2x+1 = \pm\sqrt{1}$$

$2x+1=1$ ó $2x+1=-1$

$x = 0$ ó $x = -1 \Rightarrow S = \{0,-1\}$

5.20) $$9x^2-6x+1=0 \quad \textbf{(1)}$$

Se puede resolver de dos formas:

a) Pensando que el miembro de la izquierda es un trinomio cuadrado perfecto

b) Usando la fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado

a) Recordemos el cuadrado de un binomio

$$(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$$
$$(A-B)^2 = A^2-2AB+B^2$$

El desarrollo del *Cuadrado de un Binomio* se llama *Trinomio Cuadrado Perfecto*.
Veamos si reconocemos en la ecuación un trinomio cuadrado perfecto (TCP)
Para que sea un TCP, debemos encontrar:

- Dos cuadrados perfectos,

  que serían $9x^2$ y 1

- Un doble producto de las bases.

  Las bases son $3x$ y 1

  El doble producto sería: $2.3x.1=6x$,

  que es el otro término que figura en el trinomio **(1)**.

Es un TCP que viene del cuadrado de una *resta*, por ser el *doble producto negativo*

$$9x^2-6x+1=(3x-1)^2 \quad \text{ó} \quad 9x^2-6x+1=(1-3x)^2$$

Usemos la primera opción, también funciona con la segunda (verificalo).

$$9x^2-6x+1=0$$
$$(3x-1)^2=0$$
$$3x-1=\pm\sqrt{0}$$
$$3x-1=0$$
$$3x=1$$
$$x=\frac{1}{3} \Rightarrow \quad S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$$

5.21) $2x^2-10x+12=0$, tenemos a=2

b=-10

c=12

Aplicamos la fórmula resolvente:

$$x=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4.2.12}}{2.2}$$
$$x=\frac{10\pm 2}{4}$$

$$x=\frac{10+2}{4} \qquad\qquad x=\frac{10-2}{4}$$
$$x=3 \qquad\qquad x=2$$

$$S=\{2;3\}$$

5.22) $$4x^2 - 12x + 9 = 0$$

a=4
b=-12
c=9

Aplicamos la fórmula resolvente:

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4.4.9}}{2.4}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8}$$

$$x = \frac{12 \pm 0}{8}$$

$$x = \frac{3}{2} \qquad\qquad x = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

5.23) $$3x - (2x-4)(4-3x) = 5 - 6x^2 \ \textbf{(2)}$$

$$3x - \left[8x - 6x^2 - 16 + 12x\right] = 5 - 6x^2$$

En **(2)** hay una **TRAMPA MORTAL!!!**
Es un llamado de atención que tiene que ver con un cambio de signos!!!!

TRAMPA MORTAL
Un signo menos adelante de una distributiva.

Vemos que en el enunciado

$$3x\mathbf{-(2x\text{-}4)(4\text{-}3x)} = 5 - 6x^2$$

se presenta un signo menos adelante de la multiplicación de dos restas, que se resuelve aplicando la propiedad distributiva

$$-(2x-4)(4-3x)$$

El signo menos, afecta a la multiplicación de estas restas, por lo cual afecta a toda la expresión que resulte de aplicar la distributiva mencionada.

Luego para no caer en la **TRAMPA MORTAL** lo mejor es encerrar en un paréntesis (corchete o llave) el resultado de la distributiva

$$-\left[8x - 6x^2 - 16 + 12x\right]$$

y luego cambiar los signos al suprimirlo, así:

$$-8x + 6x^2 + 16 - 12x$$

$$3x - 8x + 6x^2 + 16 - 12x = 5 - 6x^2$$

$$12x^2 - 17x + 11 = 0$$

a=12
b=-17
c=11

Como el discriminante es negativo, la solución es vacía

$$S = \phi$$

5. ECUACIONES IRRACIONALES.

Estas son las ecuaciones en las cuales las variables forman parte de algún radicando.
En este momento veremos las que tienen que ver con raíces cuadradas.

Ejercicios:

5.29) $\sqrt{2x+1}=3$

5.30) $\sqrt{1-3x}=-1$

5.31) $\sqrt{x+1}=\sqrt{2-3x}$

5.32) $\sqrt{x-1}=\sqrt{2-3x}$

5.33) $\sqrt{x}=-\sqrt{x}$

Resoluciones:

Siempre que resolvamos ecuaciones,
no debemos olvidar el estudio de las restricciones para sus variables.

5.29) $\sqrt{2x+1}=3$

RESTRICCIONES

$$2x+1\geq 0$$
$$x\geq -\frac{1}{2}$$
$$x\in\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$$

Esto queda esperando a que termine de resolver

La idea es deshacernos de la raíz cuadrada,
para lo cual elevamos ambos miembros al cuadrado.

$$\left(\sqrt{2x+1}\right)^2=3^2$$
$$2x+1=9$$
$$x=4$$

MIRO **(las restricciones)**

Vemos que $4\in\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$

De todos modos, se confirma que el valor verifica la ecuación.

Verificación

$$\sqrt{2.4+1}=3$$
$$\sqrt{9}=3$$
$$3=3$$

Luego

$$S=\{4\}$$

5.30) $\sqrt{1-3x} = -1$

RESTRICCIONES

$1-3x \geq 0$

$x \leq \frac{1}{3}$

Esto queda esperando a que termine de resolver

$$\left(\sqrt{1-3x}\right)^2 = (-1)^2 \quad \textbf{(3)}$$

$$1-3x = 1$$

$$x = 0$$

MIRO **(las restricciones)**

Se cumple que $0 \leq \frac{1}{3}$

¿Podemos decir que la solución es x=0?

Veamos si se verifica la ecuación con el valor hallado.

Verificación

$\sqrt{1-3.0} = -1$

$\sqrt{1} = -1$

$1 = -1$

No verifica!!

Entonces lo que creíamos que era solución, no lo es.

La solución es vacía $\quad S = \phi$

Les cuento qué ocurrió.

En nuestro caso, debíamos **pensar** antes de actuar.

¿Es posible que una raíz cuadrada (por lo que vemos, positiva) sea igual a -1 (algo negativo)?

Jamás!!!!

Esto indica que no era necesario resolver la ecuación.
Desde sus orígenes se veía el ABSURDO, lo cual indicaba que no tenía solución.
O sea, $\quad S = \phi$

Pero ahora es importante preguntarse **¿De dónde surge la contradicción?**
La estrategia utilizada para deshacernos de la raíz cuadrada es peligrosa,
pero no existe otra forma de seguir adelante con la resolución.
Veamos por qué es peligrosa...
Al elevar al cuadrado ambos miembros estamos generando una nueva ecuación, que no siempre es equivalente a la anterior (no admite las mismas "soluciones").

Estos números reemplazados en la ecuación original, consiguen en un miembro un valor no nulo y en el otro su opuesto, los cuales lógicamente no son iguales. Pero sabemos que dos números opuestos elevados al cuadrado sí son iguales, por lo que, aunque no son soluciones de la ecuación original, lo son de la nueva ecuación **(3)** que surge de nuestra estrategia: *elevar ambos miembros al cuadrado*.

Los números que son soluciones de la ecuación que surge de elevar ambos miembros al cuadrado pero no lo son de la ecuación original se llaman

raices extrañas.

En el caso de nuestra ecuación, x=0 es una raíz extraña,
pues es solución de la ecuación que surge de la estrategia (elevando ambos miembros al cuadrado)

$$\left(\sqrt{1-3x}\right)^2 = (-1)^2$$

$$1 \;=\; 1 \textbf{ OK}$$

pero no es solución de la ecuación original.

$$\sqrt{1-3x} = -1$$

1= -1 **ABSURDO**

Con esto vemos la necesidad de **verificar siempre en la ecuación original** los valores que creemos soluciones de la ecuación, *en el caso de haber elevado ambos miembros de la ecuación a un exponente par*, para **detectar la presencia de raices extrañas**.

5.31) $$\sqrt{x+1} = \sqrt{2-3x}$$

RESTRICCIONES

$$x+1 \geq 0 \textbf{ y } 2-3x \geq 0$$

$$x \geq -1 \textbf{ y } x \leq \frac{2}{3}$$

$$x \in \left[-1;\frac{2}{3}\right]$$

Esto queda esperando a que termine de resolver

¡Cuidado con las raices extrañas! $$\left(\sqrt{x+1}\right)^2 = \left(\sqrt{2-3x}\right)^2$$

$$x+1 = 2-3x$$

$$4x = 1$$

$$x = \frac{1}{4}$$

MIRO **(las restricciones)**

Como $\frac{1}{4} \in \left[-1;\frac{2}{3}\right]$

Sólo nos queda verificar el valor en la ecuación inicial:

$$\sqrt{\frac{1}{4}+1} = \sqrt{2-3.\frac{1}{4}}$$

$$\sqrt{\frac{5}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} \textbf{ OK}$$

Recién ahora podemos decir que…………………… $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

5.32) $\sqrt{x-1}=\sqrt{2-3x}$

RESTRICCIONES

$$x-1\geq 0 \text{ y } 2-3x\geq 0$$
$$x\geq 1 \text{ y } x\leq \frac{2}{3}$$
$$x\in \phi$$

Podemos asegurar que no existe x que verifique la ecuación porque ni siquiera se puede encontrar algún x que asegure un resultado real para las raíces de la ecuación dada.

Luego

$$S=\phi$$

De todos modos, si hubo un olvido y no se analizaron las restricciones, la resolución sigue así

$$\left(\sqrt{x-1}\right)^2=\left(\sqrt{2-3x}\right)^2$$ ¡Cuidado con las raices extrañas!

$$x-1=2-3x$$

$$x=\frac{3}{4}$$

Pero podría querer verificar este valor en el enunciado de la ecuación:

$$\sqrt{\frac{3}{4}-1}=\sqrt{2-3.\frac{3}{4}}$$

$$\sqrt{-\frac{1}{4}}=\sqrt{2-\frac{9}{4}}$$

No podemos seguir operando, porque en el primer miembro se nos presenta una raíz cuadrada de un número negativo, la cual no ofrece un resultado real.

Vemos que x nunca podría tomar el valor $\frac{3}{4}$, entonces $\frac{3}{4}$ no es solución.

Finalmente podemos concluir que

$$S=\phi.$$

5.33) $\sqrt{x} = -\sqrt{x}$ **(1)**

RESTRICCIONES

$x \geq 0$

A esta altura del ejercicio ya nos podemos dar cuenta de que el único caso en que un número es igual a su opuesto es cuando ese número es cero, luego

$$\sqrt{x} = 0$$

Entonces x=0 MIRO **(las restricciones)**

$$S = \{0\}$$

Otra forma:

RESTRICCIONES
$x \geq 0$

¡Cuidado con las raices extrañas! $(\sqrt{x})^2 = (-\sqrt{x})^2$

$$x = x$$

$x \in R$ MIRO **(las restricciones)**

Parece entonces que la solución es $R^+ \cup \{0\}$, pero haciendo reemplazos en la ecuación inicial garantizamos que la expresión **(1)** sólo se verifica para *x*=0.
Cualquier real positivo es una raíz extraña.

Luego

$$S = \{0\}$$

Que es la solución antes obtenida.

PARTE II

LAS INECUACIONES

CAPITULO 2: Las inecuaciones

CAPITULO 2: Las inecuaciones

1. Las leyes de monotonía
2. Procedimiento de resolución

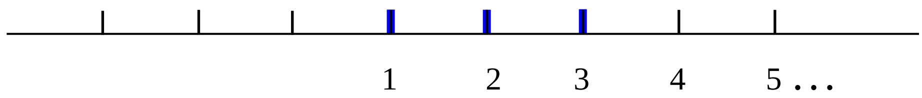
   Un Secreto: Factores o divisores negativos

II-CAPITULO 2 : Las inecuaciones.

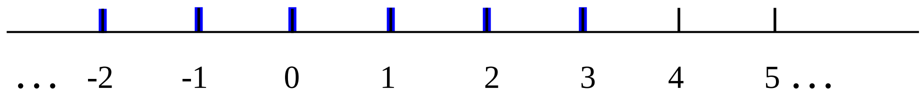
Así como las ecuaciones son igualdades que se verifican para ciertos valores de sus incógnitas, las inecuaciones son desigualdades con las mismas características.
Dada una inecuación, se pretende hallar el conjunto solución, que es el conjunto formado por todos los elementos que la verifican.

Sea la inecuación $x \leq 3$
Los números que verifican esta inecuación son los que se encuentran en la recta numérica, a la izquierda del 3 o podría ser el mismo 3.

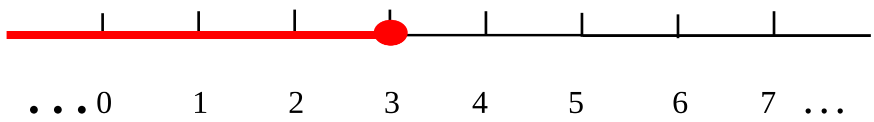
El conjunto solución en *N* es $S_N = \{1,2,3\}$



en *Z* es $S_Z = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,3\}$



y en *R* $S_R = (-\infty,3]$

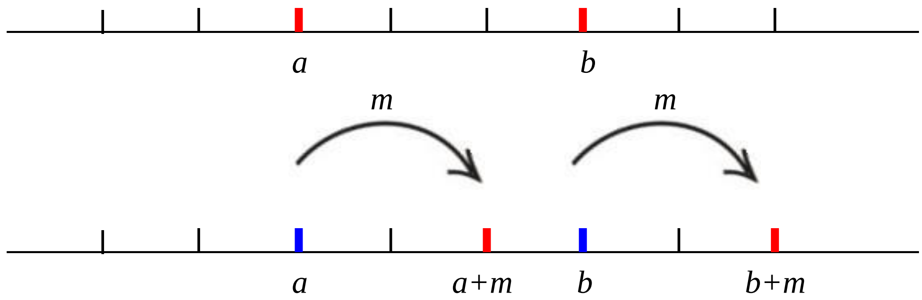


En las <u>ecuaciones</u> los procesos se fundamentan mediante la <u>Ley Uniforme</u>.
Para las <u>**inecuaciones**</u> vamos a abordar las llamadas <u>**Leyes de Monotonía**</u>

1. LEYES DE MONOTONIA.

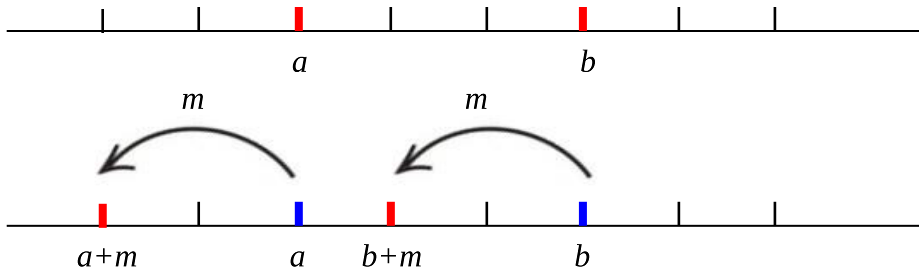
- **Para la suma.** Existen dos leyes de monotonía para la suma:
  - **I.** *Si a ambos miembros de una desigualdad le sumamos un mismo número, obtenemos una desigualdad del mismo sentido que la dada.*
  - En símbolos: $\forall a \in R, \forall b \in R, \forall m \in R, a \langle b \Rightarrow a+m \langle b+m$

Para la captación gráfica pensemos que m es mayor que cero, o sea positivo.



La idea es que si *a* es menor que *b*, entonces *a* está a la izquierda de *b*.
Sumar un número positivo es desplazarse hacia la derecha la cantidad de unidades que indica ese número, pero si nos desplazamos hacia la derecha la misma cantidad de unidades desde *a* que desde *b*, la relación de menor que existía entre *a* y *b* será la misma que entre *a*+*m* y *b*+*m*. **(1)**

Consideremos ahora que m es un número negativo, pues si es cero la propiedad se verifica claramente (resultaría a+0<b+0 por ser a<b).



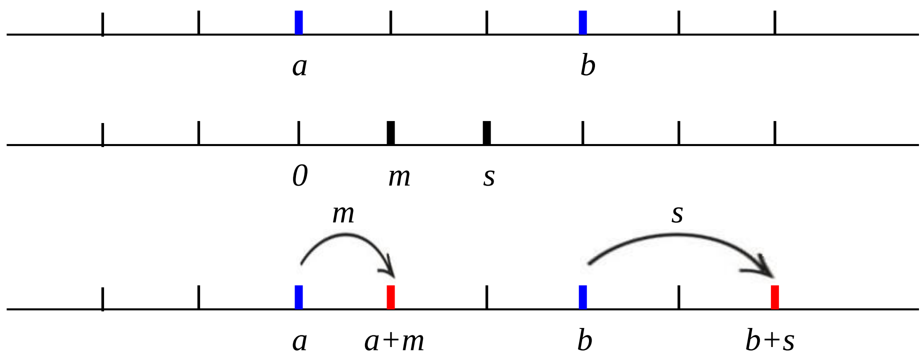
Sumar un número negativo, es igual a restar su opuesto (*un positivo)* Ej:3+(-2)=3-(+2)=3-2 Esto implica desplazarse hacia la izquierda la cantidad de unidades que indica el opuesto del número, pero si nos desplazamos hacia la izquierda la misma cantidad de unidades desde *a* que desde *b*, la relación de menor que existía entre *a* y *b* será la misma que entre *a+m* y *b+m*.

- Invirtiendo *a* con *b*, (relación de mayor): $\forall a \in R, \forall b \in R, \forall m \in R, b > a \Rightarrow b + m > a + m$

II. *Si sumamos miembro a miembro dos desigualdades del mismo sentido, obtenemos otra desigualdad del mismo sentido que la dada.*

- En símbolos: $\forall a \in R, \forall b \in R, \forall m \in R, \forall s \in R, a < b \wedge m < s \Rightarrow a + m < b + s$

Para trabajar gráficamente pensemos que sumar números positivos significa desplazarnos hacia la derecha, pero si sumamos números negativos, es restar su opuesto, o sea *restar un positivo*, luego el desplazamiento será *hacia la izquierda*.
En principio consideremos que los números *m* y *s* son positivos



¿Y cómo estamos seguros de que *a+m* siempre estará a la izquierda de *b+s*?
Cómo $a < b$ entonces *a* está a la izquierda de *b*.

Si sumáramos el mismo número (*s*) tanto a *a* como a *b*, según lo visto en **(1)** generaríamos el mismo desplazamiento hacia la derecha desde *a* y desde *b*, manteniendo entre los resultados la misma distancia, por ende se verificaría la relación de menor entre ellos:

$$a + s < b + s \quad \textbf{(2)}$$

Sin embargo, el desplazamiento que se debe realizar desde *a*, o sea *m*, es menor que *s*, por lo cual el punto de la recta numérica correspondiente a *a+m* estará a la izquierda de *a+s*.
Razonando como en **(1)**: $\forall m \in R, \forall s \in R, \forall a \in R, m < s \Rightarrow m + a < s + a$

$$a + m < a + s \quad \textbf{(3)}$$

Aplicando la transitividad de la relación de menor con las desigualdades **(2)** y **(3)**:

$a + m < a + s$ y $a + s < b + s$ resulta $a + m < b + s$

Se puede trabajar para esta ley con las siguientes posibilidades:
1. m<0 y s<0. 2. m<0 y s>0. 3. m=0 y s>0. 4. m<0 y s=0.

- Análogamente: $\forall a \in R, \forall b \in R, \forall m \in R, \forall s \in R, a > b \wedge m > s \Rightarrow a + m > b + s$

- **Para la resta**

Atendiendo a los razonamientos detallados en la suma, verificamos las leyes de monotonía de la resta para las relaciones de mayor y menor.

I. *Si a ambos miembros de una desigualdad le restamos un mismo número, seguimos obteniendo una desigualdad del mismo sentido que la dada.*

En símbolos: $\forall a \in R, \forall b \in R, \forall m \in R, a \langle b \Rightarrow a - m \langle b - m$
$\forall a \in R, \forall b \in R, \forall m \in R, b \rangle a \Rightarrow b - m \rangle a - m$

II. *Si restamos miembro a miembro dos desigualdades del mismo sentido, obtenemos otra desigualdad del mismo sentido que la dada.*

En símbolos: $\forall a \in R, \forall b \in R, \forall m \in R, \forall s \in R, a \langle b \wedge m \langle s \Rightarrow a - m \langle b - s$
$\forall a \in R, \forall b \in R, \forall m \in R, \forall s \in R, a \rangle b \wedge m \rangle s \Rightarrow a - m \rangle b - s$

- **Para la multiplicación**

I. *Si multiplicamos ambos miembros de una desigualdad por un mismo número positivo, obtenemos una desigualdad del mismo sentido que la dada.*

En símbolos: $\forall a \in R, \forall b \in R, \forall m \in R, m \rangle 0, a \langle b \Rightarrow a.m \langle b.m$

II. Si multiplicamos los miembros de una desigualdad por un mismo número negativo, obtenemos una desigualdad de distinto sentido que la dada.

En símbolos: $\forall a \in R, \forall b \in R, \forall m \in R, m \langle 0, a \langle b \Rightarrow a.m \rangle b.m$

En esta ley debemos poner el acento cuando manejemos inecuaciones

III. *Si m=0, obtenemos una igualdad pues a.m=b.m=0*

- **Para la división**

I. *Si dividimos ambos miembros de una desigualdad por un mismo número positivo, obtenemos una desigualdad del mismo sentido que la dada.*

En símbolos: $\forall a \in R, \forall b \in R, \forall m \in R, m \rangle 0, a \langle b \Rightarrow a : m \langle b : m$

II. ***Si dividimos ambos miembros de una desigualdad por un mismo número negativo (distinto de cero), obtenemos una desigualdad de distinto sentido que la dada.***

En símbolos: $\forall a \in R, \forall b \in R, \forall m \in R, m \langle 0, a \langle b \Rightarrow a : m \rangle b : m$

En esta ley debemos poner el acento cuando manejemos inecuaciones

III. *Si m=0,* **no podemos operar porque está prohibido dividir por cero!**

2. RESOLUCION DE INECUACIONES

<u>Ejercicio</u>:
Aplicando las Leyes de Monotonía, resolver las siguientes inecuaciones

6.1) $x+5<8$
6.2) $5x-2\geq 3-2x$
6.3) $3-2x\geq -15$
6.4) $3\leq 5x+1<6$

<u>Resolución</u>:

6.1) $x+5<8$

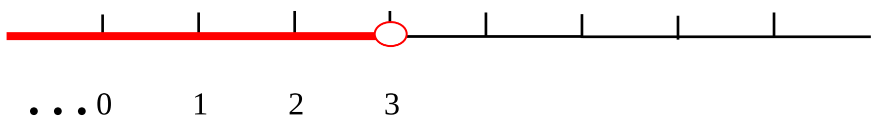
Trabajando con la primera ley de monotonía para la resta, elimino el 5 que está sumando:

$$\forall a\in R, \forall b\in R, \forall m\in R, a<b\Rightarrow a-m<b-m$$

$$x+5<8$$

$$x+5-5<8-5$$

$$x<3$$



Luego $S_R=(-\infty,3)$
$S_N=\{1,2\}$
$S_Z=\{\ldots,-2,-1,0,1,2\}$

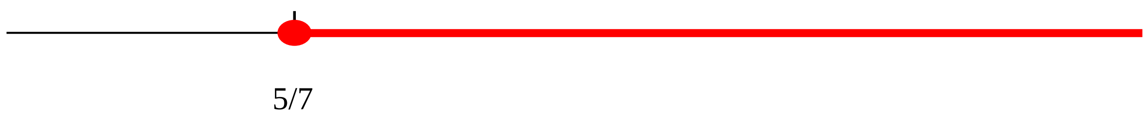
<u>De ahora en más, si no hablamos del conjunto referencial de nuestra solución, será R</u> (S_R)

6.2) $5x-2\geq 3-2x$

$$5x+2x\geq 3+2$$

$$7x\geq 5$$

$$x\geq \frac{5}{7}$$



$$S=\left[\frac{5}{7};+\infty\right)$$

6.3) $3-2x \geq -15$

$-2x \geq -15-3$

$-2x \geq -18$ **(1)**

La idea es eliminar el -2.

Luego aplicando la ley de monotonía que vimos en la multiplicación para números negativos:

Si multiplicamos ambos miembros de una desigualdad por un mismo número negativo, obtenemos una desigualdad de distinto sentido que la dada.

En su momento dijimos:

En esta ley debemos poner el acento cuando manejemos inecuaciones

$$-2x \geq -18$$

¡¡¡ATENCION CON EL SENTIDO DE LA DESIGUALDAD!!!

$$(-1)\cdot(-2x) \leq -18\cdot(-1)$$

$$2x \leq 18 \qquad \textbf{(2)}$$

En este punto, vemos que el manejo de las inecuaciones **es el mismo** que el de las ecuaciones, salvo en los casos en que existen *factores o divisores negativos* que quisiéramos eliminar.
A esta altura de nuestro discurso, descubrimos **"un secreto para las inecuaciones"** que surge de la ley de monotonía que acabamos de recordar:

Un secreto para las inecuaciones: Factores y divisores negativos.

En toda inecuación,
si multiplicamos o dividimos ambos miembros
por algo negativo,
entonces
se invierte el sentido de la desigualdad.

Luego, para que el sentido de la desigualdad se invierta, se deben dar las dos condiciones:

1) además de ser negativo,
2) debe estar multiplicando o dividiendo.

Otra forma de continuar desde **(1)**

$-2x \geq -18$

$-1\cdot 2x \geq -18$ está multiplicando y es negativo

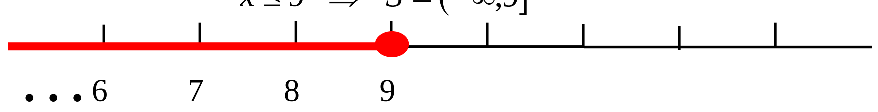
$2x \leq \dfrac{-18}{-1}$ se invierte el sentido de la desigualdad

$2x \leq 18$

que es la expresión **(2)** obtenida hace un ratito, utilizando correctamente las leyes.

Continuando $x \leq \dfrac{18}{2}$

$x \leq 9 \Rightarrow S = (-\infty;9]$



6.4) $3 \leq 5x + 1 < 6$

Estas son dos desigualdades condensadas que se pueden expresar así:

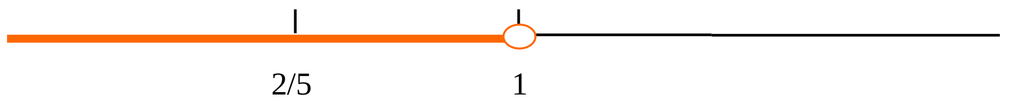
$$3 \leq 5x + 1 \quad \text{y} \quad 5x + 1 < 6$$

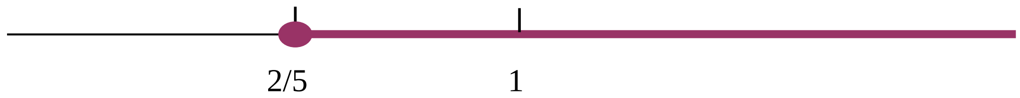
$$3 - 1 \leq 5x \quad \text{y} \quad 5x < 6 - 1$$

$$\frac{2}{5} \leq x \quad \text{y} \quad x < 1$$

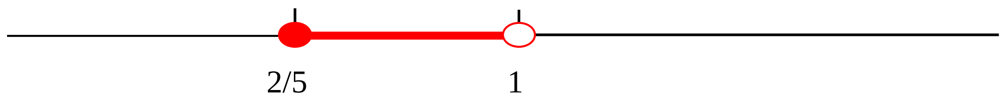
Para graficar más claramente conviene tener la variable en el miembro de la izquierda de la desigualdad.

$$x \geq \frac{2}{5} \quad \text{y} \quad x < 1$$





Dado que las desigualdades están vinculadas por una "y" sus soluciones se conectan mediante la "intersección" (lo pintado de ambos colores a la vez).



$$\frac{2}{5} \leq x < 1$$

$$S = \left\{ x \in R / \frac{2}{5} \leq x < 1 \right\}$$

O bien,

$$S = \left[\frac{2}{5}, 1 \right)$$

Práctica 1

Números reales. Operaciones combinadas.
Propiedades.Ecuaciones.

1. Calcular.

   a) $2+3-7+2-1$
   b) $2(1-3)$
   c) $(2+4+5-3):2$
   d) $4-(1+7)+3(1+2)-(3+5):4$
   e) $2(1+3)^2-20+\sqrt{9}$
   f) $\left(8^{4/9}\right)^{-3/2}$
   g) $2\left(7^6:7^4\right)^{-1}+5^{-2}5^3$
   h) $\sqrt{16+9}-1$
   i) $(2+3^{-1}+1)(1-2)$
   j) $\frac{1}{2}+\frac{4}{5}$
   k) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}+\frac{2}{5}:\frac{3}{4}$
   l) $\frac{5}{3}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$
   m) $\frac{3}{5}\left(1-\frac{2}{3}\right)-\frac{2}{5}$
   n) $\left(\frac{2}{5}-3\right)^0+4$
   ñ) $\left(\frac{2}{3}\right)^2+\sqrt{\frac{9}{4}}$
   o) $\left(\frac{29}{4}-1\right)^{1/2}$
   p) $\left(\frac{7}{4}+\frac{1}{2}-\frac{5}{3}\right):\frac{1}{2}$
   q) $\left(-\frac{5}{7}+\frac{2}{5}\right):35+27$

2. Decidir, en cada caso, si las expresiones dadas son iguales.

   a) $\sqrt{ab}$ y $\sqrt{a}\sqrt{b}$ con $(a,b\geq 0)$
   b) $\sqrt{a+b}$ y $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ con $(a,b\geq 0)$
   c) $\frac{1}{\sqrt{a}}$ y $\frac{\sqrt{a}}{a}$ con $(a>0)$
   d) $(a+b)^2$ y $a^2+2ab+b^2$
   e) $(a+b)^2$ y a^2+b^2
   f) $(a-b)^2$ y $a^2-2ab-b^2$
   g) $(a-b)^2$ y $a^2-2ab+b^2$
   h) $(a+b)^2$ y a^2-b^2
   i) $\frac{a+b}{a}$ y $1+\frac{b}{a}$ con $(a\neq 0)$
   j) $\frac{a+b}{c}$ y $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$ con $(c\neq 0)$
   k) $\frac{1}{a+b}$ y $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ con $(a\neq 0,\ b\neq 0,\ a+b\neq 0)$
   l) $a^{5/3}$ y $\sqrt[3]{a^5}$
   m) a^2-b^2 y $(a-b)(a+b)$
   n) a^{-1} y $\frac{1}{a}$ con $(a\neq 0)$
   ñ) a^{-1} y $-a$ con $(a\neq 0)$
   o) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$ y $\frac{b}{a}$ con $(a\neq 0,\ b\neq 0)$

p) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ y $\frac{ad}{bc}$ con $(b \neq 0,\ c \neq 0,\ d \neq 0)$

3. Aplicar las fórmulas de cuadrado y cubo de un binomio y la de diferencia de cuadrado, según corresponda, y desarrollar las siguientes expresiones:

   a) $(x+3)^2$
   b) $(2-x)^2$
   c) $(x+2)^3$
   d) $(x-a)^3$
   e) $(x+1)(x-1)$
   f) $(a-b)(a+b)$
   g) $2(x+4)$
   h) $(x+3)(x-4)$

4. Resolver.

   a) $2x+3=6$
   b) $5x+4=-2x-3$
   c) $8-x=x+3$
   d) $3(x-8)+6(2-x)-(x-2)=x$
   e) $2(2x-3)=6+x$
   f) $\dfrac{x-1}{6}-\dfrac{x-3}{2}=-1$
   g) $4(x-10)=-6(2-x)-6x$
   h) $\dfrac{2}{3}\left[x-\left(1-\dfrac{x-2}{3}\right)\right]+1=x$
   i) $x-1=x+2$
   j) $x+3=x+3$
   k) $2(x-1)=3(x-1)-(x-1)$
   l) $4(x-2)-2x=2(x-3)$

5. Resolver.

   a) $x^2+2x-3=0$
   b) $5x^2+6x+1=0$
   c) $x^2+2x+1=0$
   d) $5x^2+2x+1=0$
   e) $3x^2=9$
   f) $x^2+5x=0$
   g) $2x^2=4x$
   h) $2x^2-7x=-3$

i) $2x - 3 = 1 - 2x + x^2$

j) $x^2 + (7 - x)^2 = 25$

k) $18 = 6x + x(x - 13)$

l) $(x - 1)(x + 3) = 0$

m) $(2x + 4)(x - 5) = 0$

Práctica 2

Simela. Proporcionalidad, porcentaje y escala.

1. Completar la siguiente tabla:

km	*hm*	*dam*	*m*	*dm*	*cm*	*mm*
0,035	0,35	3,5	35	350	3500	35000
			2,7			
1,008						
					600	
		8				
				120		

2. Completar la siguiente tabla:

kg	*hg*	*dag*	*g*	*dg*	*cg*	*mg*
2	20	200	2000	20000	200000	2000000
		52				
			300			
0,058						
					6000	
				250		

3. Completar la siguiente tabla:

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
			5,6			
200						
				130		
					7	
		0,9				

4. Completar la siguiente tabla:

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
			5			
3						
					60	
		8				
				0,34		

5. Completar la siguiente tabla:

km	*hm*	*dam*	*m*	*dm*	*cm*	*mm*
0,035	0,35	3,5	35	350	3500	35000
			2,7			
1,008						
					600	
		8				
				120		

6. ¿Cuántos litros de capacidad tiene un tanque que tiene volumen de 14 m^3?

7. Dos ruedas están unidas por una correa transmisora. La primera tiene un radio de 25 cm y la segunda de 75 cm. Cuando la primera ha dado 300 vueltas, ¿cuántas vueltas habrá dado la segunda?

8. Seis personas pueden vivir en un hotel durante 12 días por 79200 \$. ¿Cuánto costará el hotel de 15 personas durante la misma cantidad de días? ¿y para 15 personas durante 8 días?

9. Si con 12 botes de medio litro de pintura cada uno se han pintado 90 m de una cerca de 80 cm de altura. Calcular cuántos botes de 2 litros de pintura serán necesarios para pintar una cerca similar de 120 cm de altura y 200 m de longitud.

10. 11 obreros nivelan en un terreno rectangular de 220 m de largo y 48 m de ancho en 6 días. ¿Cuántos obreros serán necesarios para realizar el mismo trabajo en otro terreno análogo de 300 m de largo por 56 m de ancho en cinco días?

11. Seis grifos, tardan 10 horas en llenar un depósito de 400 m^3 de capacidad. ¿Cuántas horas tardarán cuatro grifos en llenar 2 depósitos de 500 m^3 cada uno?

12. La torre Eiffel mide aproximadamente 300 m de altura y pesa 8 millones de kg. Si construimos una torre Eiffel a escala, utilizando el mismo material de la original pero que pesa 1 kilo. ¿Cuánto medirá?

13. Se sabe que la altura y la sombra de un edificio son proporcionales. Si la sombra de un edificio de 30 m es 8 m, ¿qué altura tendrá otro edificio cuya sombra en el mismo momento mide 12 m?

14. Se sabe que la altura y la sombra de un edificio son proporcionales. Si la sombra de un edificio de 30 m es 8 m, ¿qué altura tendrá otro edificio cuya sombra en el mismo momento mide 12 m?

15. Por hacer un trabajo tres obreros han cobrado 30400 pesos. Juan trabajo 15 días, Pedro trabajó 12 días y Franco 6 días.

a) Suponiendo que todos hayan trabajado la misma cantidad de horas por día, ¿Cuánto dinero le corresponderá a cada uno?

b) ¿Y si la jornada laboral de Franco y de Pedro fueron siempre del doble y triple de duración respectivamente que la de Juan?

16. De los 800 alumnos de un colegio, han ido de viaje 600 . ¿Qué porcentaje de alumnos ha ido de viaje?

17. Al adquirir un vehículo cuyo precio es de 880000 $, nos hacen un descuento del 7.5 %. ¿Cuánto hay que pagar por el vehículo?

18. Cuál será el precio al que debemos publicar un artículo que compramos a 1800 $ para ganar al venderlo el 10 % sobre el precio de compra.

19. Se vende un objeto perdiendo el 20 % sobre el precio de compra. Hallar el precio de venta del citado artículo cuyo valor de compra fue de 1500 $.

20. Un comerciante pone a la venta un producto nuevo. A la semana siguiente lo aumenta un 20 % pero a la semana siguiente lo baja un 15 %. De esta forma obtiene un producto que comparado con el precio original ¿es más caro o más barato? ¿en que porcentaje?

21. El precio de una computadora es de 12000 $ sin IVA. ¿Cuánto hay que pagar por él si el IVA es del 21 %?

22. Tres hermanos heredan un campo de 1300 m^2. Entre ellos se han puesto de acuerdo para dividirlo en tres parcelas de forma tal que al mayor de los hermanos le corresponden 5/8 del terreno, al del medio los 3/7 y al menor, 7/12 .

    a) ¿Qué hermano fue el más favorecido?

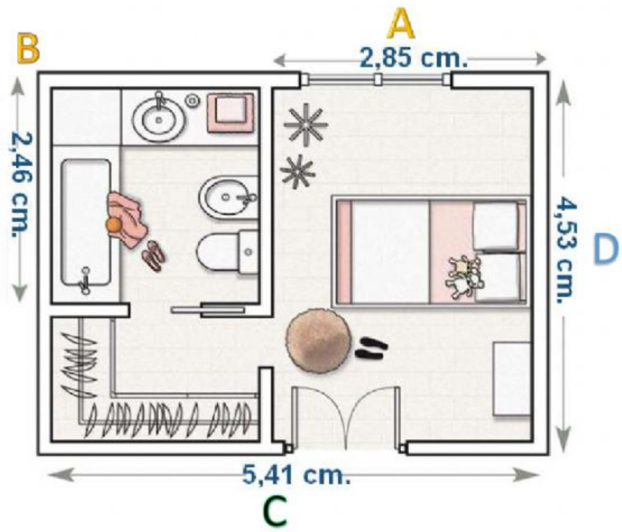
    b) Si en esa zona el m^2 de tierra cotiza 1560, ¿Cuál es el valor de cada parcela?

    c) ¿Qué porcentaje de m^2 del total le corresponde a cada hermano?

    d) ¿En cuánto está valuado el terreno completo y qué porcentaje de ese valor le corresponde a cada hermano?

23. La longitud de un par de lado opuestos de un cuadrado se reduce un 10 %, y la del otro par de lados opuestos se aumenta en un 10 %. El área del rectángulo obtenido ¿aumenta o disminuye respecto al área del cuadrado original? ¿En qué porcentaje?

24. Teniendo en cuenta que la escala de la habitación que se muestra es de 1:100.



a) ¿Cuáles son las dimensiones reales de A,B,C y D?

b) ¿Cuántos m^2 tiene el placard?

c) ¿Cuál es el ancho de la ventana? ¿y de la entrada a la habitación?

d) ¿Qué sucede si decidimos hacer la puerta de entrada simple en lugar de doble?

25. En un plano construido a escala 1 : 60 las dimensiones de la cocina son de 8 cm por 5,5 cm.

a) Indica las dimensiones reales de la cocina.

b) Si el baño tiene como dimensiones reales 2,48 m por 3,15 m. Indica sus dimensiones en el plano.

26. En un plano a escala 1 : 120 la superficie de un piso es de 80 cm^2. ¿Cuántos metros cuadrados tiene el piso en la realidad? Si la cocina, que es rectangular, mide (en el plano) 5 cm de ancho y 7 cm de largo. ¿Cuál es su superficie real?

27. Dos personas se hallan separadas por una distancia de 1500 metros ¿Cuál sería la distancia a la que habría que dibujarlas en un mapa a escala 1 : 6000?

28. ¿A qué escala está dibujado el plano de la fachada de un edificio de 60 metros de altura, si en el dibujo mide 20 cm? Si dibujo el plano del mismo edificio a escala 1 : 90 ¿el dibujo será mayor o menor que el anterior? ¿por qué?

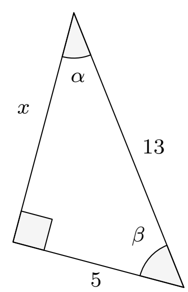
29. Se tiene el dibujo de una pieza mecánica sin sus dimensiones, pero sabemos que se ha realizado a escala 10:1. ¿Cuáles son las dimensiones reales si al medir el dibujo sus medidas son 500x600x250 mm?

30. - ¿A qué escala está construida esta maqueta si el tren real mide 40 metros y la maqueta 67 centímetros?

Práctica 3

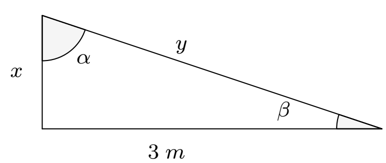
Trigonometría.

1. a) Calcular aproximadamente los valores de los ángulos α y β y el valor x.

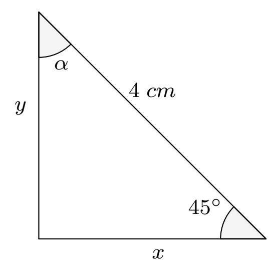


2. Calcular los valores exactos de los elementos indicados en los siguientes triángulos rectángulos.

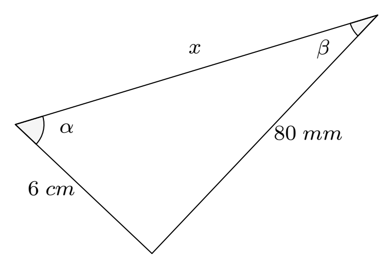
a)



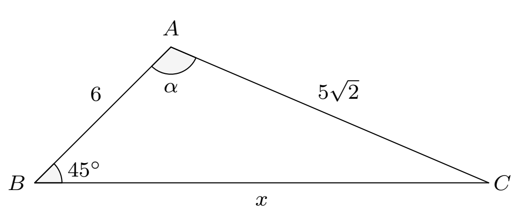
b)



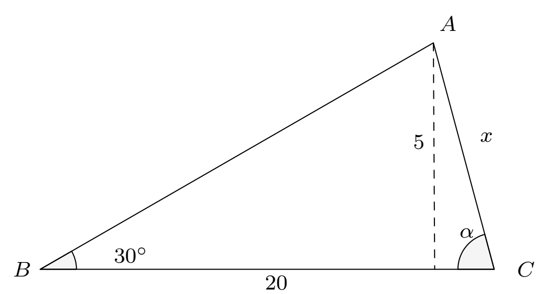
c)



3. Hallar la medida del lado x y del ángulo α.

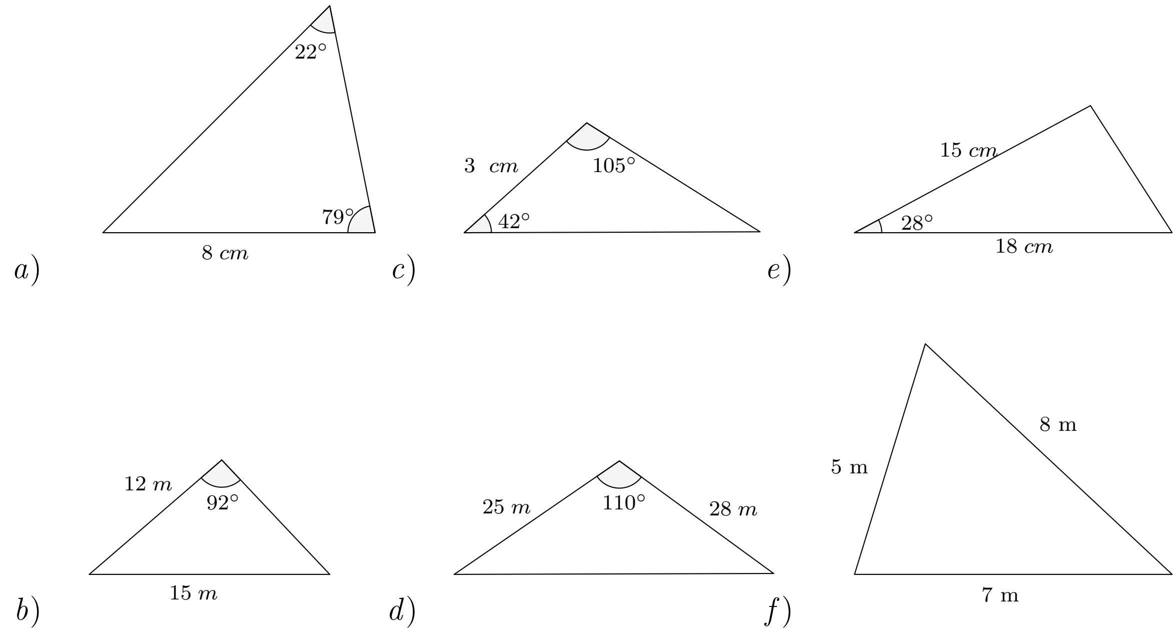


a)

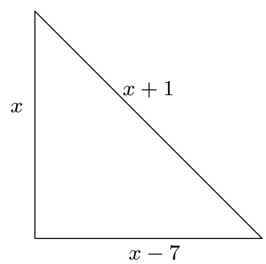


b)

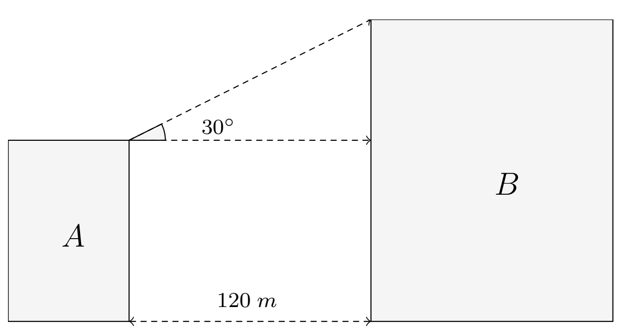
4. En los siguientes triángulos, halla los lados y ángulos faltantes:



5. Halla el valor de x sabiendo que el triángulo es rectángulo.



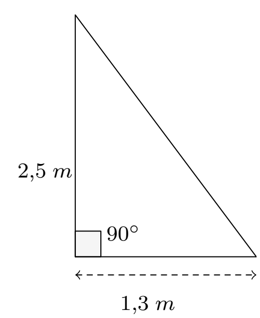
6. La distancia entre los edificios A y B es de 120 m. Si el edificio A mide 98 m de altura y el ángulo de elevación desde el punto más alto del edificio A al punto más alto del edificio B es de 32°. Calcular, aproximadamente, la altura del edificio B.



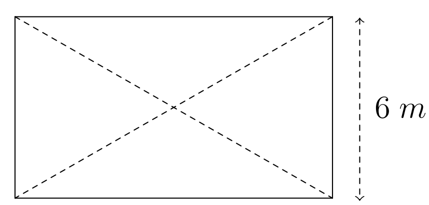
7. Los propietarios de una casa quieren convertir a una rampa los escalones que llevan del suelo al porche. El porche está a 3 pies sobre el suelo, y debido a regulaciones de construcción, la rampa debe empezar a 12 pies de distancia con respecto al porche. ¿Qué tan larga debe ser la rampa?

8. En una obra se desea verificar si las paredes están correctamente construidas formando ángulos rectos y que las mismas no estén en falsa escuadra. Por tal motivo se utiliza este método: en una de las paredes a la altura del piso se realiza una marca a los 80 cm del punto de intersección de las paredes, en la otra pared se realiza una marca a 60 cm de distancia de ese mismo punto. Al medirse la distancia entre los dos puntos marcados en las paredes la distancia es de 112 cm. De acuerdo a las mediciones realizadas ¿se verifica que las paredes están en escuadra?

9. Se planea construir la siguiente estructura para la escalera de un tobogán según se indica en la ilustración. La altura debe ser 2.5 m y la base debe medir 1.3 m. ¿Qué longitud tiene el tobogán?



10. En un muro de contención de forma rectangular se instalaron estructuras metálicas como refuerzo, de acuerdo al gráfico. El largo de cada diagonal de la estructura es de 10 m y la altura del muro es de 6 m, ¿cuánto mide el ancho del muro?



11. Indicar los metros de viga horizontal necesarios para sostener el techo a dos aguas de una cabaña si se sabe que el ancho de la casa es de 8 m y la parte central estará dos metros de la cúspide.

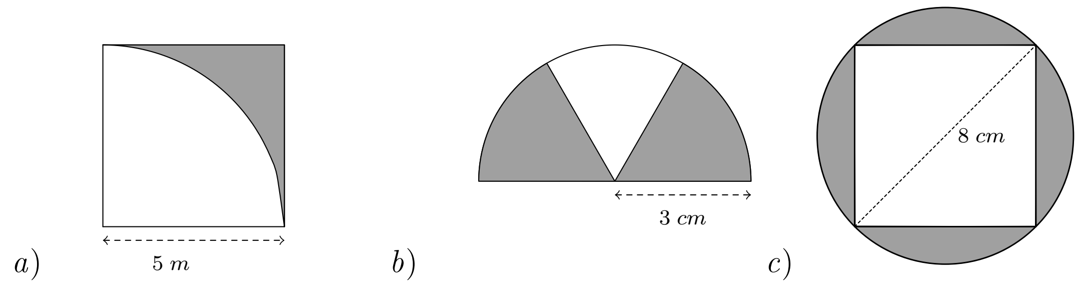
12. La Torre de Pisa está inclinada de modo que su pared lateral forma un triángulo rectángulo de catetos 5 metros y 60 metros. ¿Cuánto mide la pared lateral?

13. Laura quiere calcular el ancho de un río y la altura de un árbol que está en la orilla opuesta. Para ello te sitúas en la orilla frente al árbol y observa la copa del árbol con un ángulo de elevación de 41°. Luego retrocede 25 m y ve nuevamente el árbol con un ángulo de elevación de 23°. ¿Cuál es la altura del árbol? ¿y el ancho del río?

Práctica 4

Geometría en el plano y en el espacio.

1. Hallar la superficie sombreada



2. Calcular el área de un un triángulo cuyos lados miden 5 cm, 6 cm y 7 cm.

3. Calcular el área de un triángulo sabiendo que sus lados miden $2x+1$ cm, $x+2$ cm y $3x+1$ cm y su perimetro es igual 22 cm.

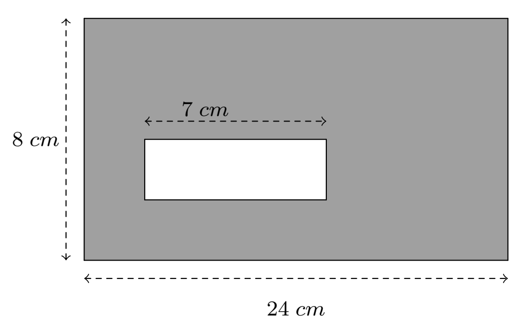
4. Calcular el perímetro del rectángulo de base $2x+1$ cm y altura $x+3$ cm y área 42 cm^2.

5. Santiago está preparando su puesto para la feria de ciencias que se realizará en su escuela. Ha decidido poner como fachada un plancha de acrílico rectangular con un cuadrado cortado en el centro para atender a la gente. El lado menor mide 4 m y el mayor el cuádruple de la mitad del otro. El perímetro del rectángulo es el doble del perímetro del cuadrado.

   a) Si quiere pegar una cinta alrededor del contorno de la fachada, ¿cuántos metros de cinta necesitará?

   b) ¿Cuántos m^2 de acrílico utilizará para armar el frente?

6. ¿Cuál es el área de la figura coloreada si su perímetro es 86cm?



7. Calcular el perímetro y el área de un triángulo isósceles si cada uno de los ángulos congruentes mide 27° y cada uno de los lados congruentes, 40 metros.

8. Calcular el perímetro y el área de un pentágono regular inscripto en una circunferencia de 4 cm de radio.

9. La diagonal de un rectángulo mide 30 cm y forma con uno de los lados un ángulo de 25°. Calcular el perímetro del rectángulo.

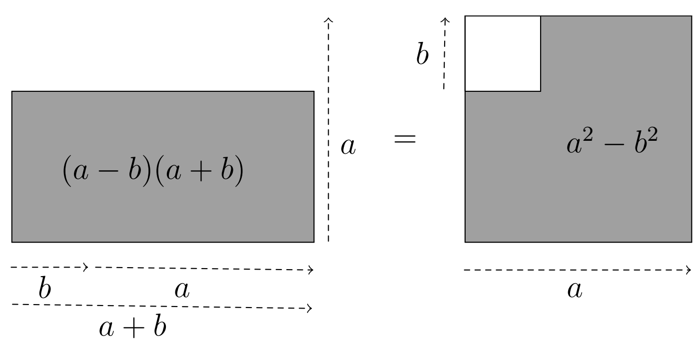
10. Calcular el área y el perímetro de un trapecio isósceles sabiendo que las bases miden 30 mm y 42mm respectivamente y uno de los ángulos adyacentes a la base mayor mide 53° 7' 48".

11. En un campo rectangular de 3 km de largo y 2,5 km de ancho se plantaron árboles en todo su perímetro a una distancia de 100 metros entre cada uno y comenzando por una esquina. ¿Cuántos árboles se plantaron?

12. Una pileta de natación tiene forma circular y su diámetro tiene 24 metros. Se quiere cercar la pileta con un alambrado que esté a una distancia uniforme de 3 metros. ¿Cuántos metros lineales de alambrado serán necesarios?

13. Para pensar (Optativo). Suponiendo que $a, b, c \neq 0$ justificar las siguientes propiedades a partir de un argumento geométrico. Tomando como modelo el siguiente ejemplo:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$



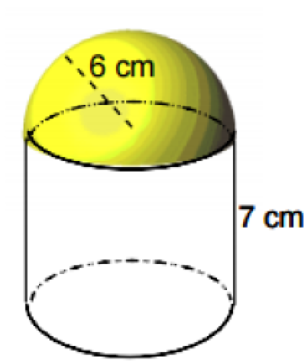
   a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
   b) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
   c) $(a+b)c = ac + bc$
   d) $\frac{ab}{2} = \left(\frac{a}{2}\right) b = a \left(\frac{b}{2}\right)$

14. Calcular la altura de la pirámide de Keops sabiendo que su base es un cuadrado de 230 metros de lado y el ángulo que forma una cara con la base es de 52°.

15. Un estudio de arquitectos tiene la consigna de colocar sobre un estadio de fútbol una pelota que tenga una longitud de circunferencia máxima de 9,40 metros. ¿Cuánto cuero se necesita para revestirla?

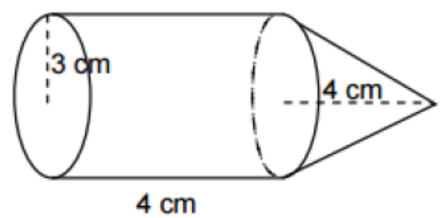
16. La superficie total de un tanque cilíndrico es de 392,50 dm^2. La superficie lateral representa un 60 % de la superficie total. ¿Cuál es la medida del diámetro de la base?

17. Calcular el vólumen y el área lateral de los siguiente cuerpos.



$a)$

$b)$



18. Dibujar una pirámide cuadrangular regular recta de lado de la base 6 cm y apotema 8 cm. Hallar: altura, superficie y volumen.

19. Dibujar una pirámide hexagonal regular recta de lado de la base 6 cm y apotema lateral 12 cm. Hallar: altura, área y volumen.

20. Dibujar una pirámide hexagonal regular recta de lado de la base 3 m y arista lateral 6 m. Hallar: apotema lateral, altura, área y volumen.

UNSAM
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE
SAN MARTÍN

UNIVERSIDAD NACIONAL DE GENERAL SAN MARTIN

CICLO DE PREPARACIÓN UNIVERSITARIA

INSTITUTO DE ARQUITECTURA Y URBANISMO

- TALLER DE LECTURA Y ESCRITURA -

CUADERNILLO PARA ESTUDIANTES

2022

PROGRAMA DE MEJORA DE LA ENSEÑANZA

INTRODUCCIÓN

El *Taller de Lectura y Escritura* del Ciclo de Preparación Universitaria de la carrera de Arquitectura se propone brindar algunas de las herramientas necesarias para que los estudiantes puedan transitar sus estudios universitarios de manera satisfactoria. De manera particular, este espacio está destinado a favorecer las competencias de producción escrita y comprensión lectora.

PROPÓSITOS DE ENSEÑANZA

- Brindar herramientas conceptuales y procedimentales orientadas a la comprensión lectora y a la expresión escrita.
- Favorecer la reflexión crítica de los estudiantes sobre sus propias producciones.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Se espera que los estudiantes:

- Conozcan y empleen recursos para optimizar la comprensión lectora.
- Comprendan que la lectura y la escritura son procesos que implican sucesivas etapas.
- Logren expresarse con claridad y coherencia a través de textos escritos.

REQUISITOS DE CURSADA Y APROBACIÓN

<u>Regularización del taller</u>:

A. Asistencia a los encuentros virtuales
B. Presentación en tiempo y forma de las actividades que sean indicadas como de entrega obligatoria

<u>Aprobación del taller</u>:

Una vez reunidas las condiciones de regularidad indicadas, es necesario obtener una calificación de 4 (cuatro) o más puntos en la evaluación que se llevará a cabo durante la última semana de cursada.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Nº	Competencias	Criterios
1	Claridad y adecuación normativa	1. Correcta utilización de signos de puntuación. 2. Correcta aplicación de reglas gramaticales. 3. Reducción de ambigüedades o frases vagas. 4. Ortografía y uso de mayúsculas.
2	Coherencia y cohesión textual	1. Escritura fluida. 2. Capacidad de síntesis. 3. Organización de la información. 4. Adecuada conexión entre oraciones y párrafos.
3	Pertinencia	1. Adecuación a la consigna y a la situación comunicativa. 2. Entrega en tiempo y forma.

MATERIALES / BIBLIOGRAFÍA OBLIGATORIA

Cuadernillo del CPU UNSAM 2022 correspondiente al ***Taller de Lectura y Escritura***.

Quaroni, L. (1980). *Proyectar un edificio: ocho lecciones de arquitectura*. Xarait. (pp. 74-77).

Tedeschi, E. (1963). *Teoría de la Arquitectura*. Ediciones Nueva Visión. (pp. 243-247).

CONTENIDOS Y CRONOGRAMA DE TRABAJO

Clase	Contenido
Clase 1 Viernes 11/02	**1.** Presentación de la materia. Programa. **2.** Introducción a la descripción de imágenes: relación entre arquitectura, observación y escritura. Elementos de una descripción.
Clase 2 Viernes 18/02	**1.** Puesta en común actividad de la clase anterior. **2.** Planificación de la escritura
Clase 3 Viernes 25/02	**1.** Devolución general sobre los planes de escritura: errores frecuentes, recomendaciones, etc. **2.** La oración como unidad de significado. Organización sintáctica. Puntuación. Errores frecuentes en la escritura.
Clase 4 Viernes 04/03	**1.** De la oración al párrafo. **1.1.** Coherencia **1.2.** Cohesión. **1.3.** Conectores.
Clase 5 Viernes 11/03	**1.** Devolución general sobre la entrega de la clase anterior: errores frecuentes, recomendaciones, etc. **2.** Entrega de consignas del examen. Explicación.

CLASE 1

PRESENTACIÓN DE LA MATERIA. COMPRENSIÓN LECTORA

1. COMPRENSIÓN LECTORA

La lectura es un proceso complejo que supone distintos momentos que nos permitirán asir el texto, es decir, entenderlo e incorporarlo a nuestro bagaje de conocimientos. Aplicar las distintas etapas de lectura es una de las mejores estrategias de estudio, porque permite entender en profundidad al texto.

La técnica de estudio que te proponemos consta de tres momentos. El primer momento consiste en una **lectura global**, que es la forma inicial de acercarse al contenido e identificar el tema que aborda el texto. El segundo momento consiste en una segunda **lectura que se realiza de forma detenida** con el objetivo de identificar y ordenar las principales ideas del texto. Por último, el momento de la **relectura** nos permite sintetizar el texto leído.

1. Primer paso: Lectura global

- Es una lectura rápida, a vuelo de pájaro. Permite introducir el tema.
- Proporciona una visión panorámica del texto.
- Permite identificar las señales que tienen el texto:
    - Título y subtítulos.
    - Estructura lógica del texto (puede estar dividido por subtemas o partes diferentes o puede tener una secuencia temporal).
    - Tema central.
    - Partes:

      Introducción
        - Presenta el tema.
        - Despierta el interés del lector.
        - Anuncia las grandes etapas.

      Desarrollo
        - Corresponde a los párrafos intermedios.
        - Establece el lazo entre los dos párrafos.
        - Contiene la idea principal del texto.

      Conclusión
        - Corresponde a los últimos párrafos.
        - Sintetiza el contenido.
    - Ilustraciones.
    - Palabras destacadas por la tipografía.

2. Segundo paso: Lectura detenida

Su objetivo es lograr la comprensión clara del texto, descomponer el mismo en sus unidades de significación mínima más importantes. Tiene una actitud inquisidora frente al texto: busca hacerle preguntas, representar gráfica y conceptualmente lo que se lee, parcelar el texto y subrayarlo. Aquí se realiza el subrayado de las ideas más importantes y el reconocimiento de las palabras clave.

A-Subrayar

- Es importante subrayar o destacar partes importantes del texto mientras se lee, ya que se estimula la lectura activa.
- Lo decisivo de subrayar no es el acto de resaltar sino decidir qué información del texto es lo suficientemente importante como para merecer destacarla.
- No es útil subrayar todo lo que se encuentra dentro del texto en forma indiscriminada.
- Se sugiere trabajar con lápices de colores.
- Se puede asignar un color para las ideas principales y otro para las secundarias.
- Se debe prestar mucha atención a las definiciones.
- Los ejemplos merecen una atención especial, ya que son muy útiles, pero sólo en función de las definiciones.
- El subrayado facilita el estudio, la retención, la confección de esquemas, mejora la atención y permite un eficaz repaso posterior.
- El texto subrayado es una buena señal que permitirá un mejor repaso al lector.

B- Buscar las ideas principales

- Cada párrafo contiene una idea principal.
- Representa la respuesta a las preguntas: ¿de qué se habla? ¿qué se dice?
- El autor expresa una determinada idea en el marco de cada párrafo.
- Se pueden encontrar párrafos que contengan más de una idea principal, o algunos en los que no aparezca ninguna idea: se los denomina "párrafos de transición".

C- Palabras clave

- Son aquellas que contienen el sentido principal. Son indispensables para comprender y recordar el mensaje.
- Las palabras clave corresponden a sustantivos y adjetivos.

D- Diccionario

- Es imprescindible su utilización para el progreso ortográfico y la comprensión de significados.
- Desconocer varias de las palabras que se encuentran dentro del texto traba la lectura y su posterior comprensión.
- Cuando se lee un texto, también se marcan las palabras desconocidas; luego se busca su significado en el diccionario para darle un sentido más preciso al texto.
- Una adecuada utilización del diccionario permite mayor comprensión y mejor ortografía.
- Se recomienda escribir las definiciones en el texto con lápiz, para tenerlas disponibles al momento de releer.
- También se sugiere posteriormente leer el fragmento con el vocabulario definido para asegurarse su comprensión.

3. Tercer paso: Relectura

Se realizará tantas veces como sea necesario para comprender y fijar el contenido del texto.

A-Preguntas clave

- Son preguntas indispensables para recuperar la información.
- Permiten obtener una información más completa del contenido del texto.
- La formulación de preguntas clave favorece la atención y concentración, y desarrolla la habilidad para razonar y adquirir nuevos conocimientos.
- Las preguntas a formular son:
  - ¿Quién? (Sujeto)
  - ¿Cómo? (Características)
  - ¿Cuándo? (Tiempo)
  - ¿Dónde? (Lugar)
  - ¿Cuánto? (Cantidad)
  - ¿Qué? (Acción)
  - ¿Por qué? (Razón de la acción)
  - ¿Para qué? (Razón de la utilidad)
  - ¿Cuál? (Elección)

B-Notas marginales

- Se recomienda primero subrayar las ideas principales.
- En el margen derecho o izquierdo de la hoja, se procederá a anotar brevemente la idea principal, utilizando un lenguaje propio.
- Se pueden unir las anotaciones por medio de flechas.
- Se recomienda utilizar abreviaturas y símbolos.
- Se pueden utilizar conceptos u oraciones cortas.
- Se pueden colocar subtítulos.
- Se puede categorizar: causas, consecuencias, procesos, etc.
- Colocar ¿? cuando no se comprende lo leído dentro del texto.
- La palabra NO puede ser ubicada cuando el párrafo no interesa al lector.
- Durante el ejercicio, el lector está realizando operaciones mentales de análisis, síntesis y clasificación.

TAREA: Lectura comprensiva

Para resolver la siguiente propuesta aplicá la técnica de estudio que vimos en la clase (lectura escalonada). Luego respondé el cuestionario que se presenta a continuación:

1) Leé el texto "Las claves para crear ciudades sustentables". Luego, realizá las siguientes actividades:

A. Identificá las palabras que no conozcas.
B. Resaltá los conceptos principales.
C. Subrayá la o las ideas principales del texto.
D. Realizá anotaciones marginales que te sirvan de guía de lectura y de síntesis del texto.
E. Sintetizá la idea principal del texto.
F. Una vez que hayas terminado la lectura del texto explicá qué ejemplo de sustentabilidad mencionado en el artículo te pareció más interesante, y por qué.

Miércoles 21 de abril de 2010

Las claves para crear ciudades sustentables

Por Rodrigo Herrera Vegas
Para **lanacion.com**

Felicito a los organizadores y oradores de TEDxBuenos Aires: la conferencia fue un gran éxito y espero que se repita todos los años. Durante el evento tuve la oportunidad de conocer a Jaime Lerner, autor de la charla "Cómo pensar una ciudad". Lerner es arquitecto, fue dos veces gobernador del estado de Paraná en Brasil y tres veces alcalde de la ciudad de Curitiba, considerada uno de los ejemplos de ciudad sustentable en América Latina.

Techo verde en la Universidad de York en Toronto. Foto: Gentileza York University.

La charla me disparó pensamientos sobre el concepto de "ciudad sustentable", que parece a primera vista estar compuesto por dos palabras opuestas. Si un sistema sustentable es aquel que puede mantener sus hábitos y comportamientos en el tiempo, entonces una ciudad da la sensación de ser justamente lo opuesto. Tan sólo cerrando una ciudad por un par de días a los camiones que nos traen alimentos, a la energía como la electricidad, gas y nafta (que vienen en su mayoría de lejos), a los camiones que retiran toda la basura que generamos y al oxígeno que viene gracias a los árboles que se encuentran afuera, nos daríamos cuenta muy rápidamente de cuán poco sustentables son en general las grandes ciudades.

Me parece entonces más razonable hablar de una ciudad *más* sustentable o *lo más sustentable posible*. Las ciudades sustentables todavía están lejos de ser una realidad. Dado que actualmente el 50 por ciento de la población mundial vive en ciudades y zonas urbanas, el desafío es grande.

Por ejemplo, las ecovillasGaia, ubicadas en Navarro, provincia de Buenos Aires, son lo más cercano a comunidades sustentables que conocemos en Argentina. Estas comunidades alojan a una cantidad muy reducida de habitantes. Más allá de esta característica, existen varios puntos que incrementan la sustentabilidad de una ciudad:

- Mayor cantidad de espacios verdes para producir oxígeno y tomar CO_2.
- Fuentes de alimentos lo más cercanas posibles para evitar grandes cantidades de energía en su transporte.
- Medios de transporte eficientes energéticamente y poco contaminantes.
- Aprovechamiento de energías renovables (solar, eólica, geotérmica) y de biogás aprovechando los deshechos cloacales.
- Reutilización y reciclado de basura.
- Incremento de espacios verdes, incluyendo techos verdes en los edificios para reducir el efecto de isla de calor y reducir las inundaciones al absorber parte del agua de lluvia.

- Minimización de la superficie urbana.

Todos estos conceptos deben ser aplicados e integrados para considerar a una ciudad como sustentable. Diversas ciudades en el mundo se han especializado en temas específicos, pero hasta ahora ninguna aplica todos.

Barrio de Vaubon en Friburgo. Foto: YannArthus Bertrand / documental Home

Las grandes ciudades deben alojar millones de personas y, aunque parezca poco intuitivo, es mejor crear grandes edificios verticales y reservar al lado espacios verdes. En ese sentido, es más sustentable un modelo como Manhattan, que aloja más de 1,6 millones de personas en 59km^2, que Los Ángeles, que aloja 3,8 millones en 1290km^2. Nueva York tiene entonces 27.000 personas por km^2 en vez de las 2.945 que tiene Los Ángeles. A nivel ecosistema, es preferible que la diferencia se utilice -por ejemplo- para establecer un parque nacional. Adicionalmente, hay que tomar en cuenta la enorme cantidad de combustible que se necesita para trasladar a las personas largas distancias como las hay en Los Ángeles.

Tanto Berlín y Stuttgart, en Alemania, como Toronto, en Canadá, son las ciudades que poseen las mayores superficies de techos verdes. Friburgo, en Alemania, aunque no pueda considerarse una gran ciudad, se destaca por el uso eficiente de la energía. Las casas están diseñadas para minimizar el consumo, bajo el concepto de *passivhau,s* y logran mantener cómodas temperaturas sin necesidad de energía externa gracias a su novedoso diseño y materiales aislantes. Mientras que una casa típica en Alemania consume 220KWh de energía por año, por cada m^2 de superficie, en Friburgo el consumo se ha reducido hasta 15kWh/m^2 en promedio. Uno de sus barrios, Vaubon, recibe dos tercios de su electricidad a través de paneles fotovoltaicos.

Desde el año 2002, los pueblos de Mihama y Mikata, en Japón, utilizan una planta de arco de plasma que procesa 24 toneladas de residuos sólidos urbanos por día, transformando basura en electricidad y materiales de construcción. A su vez, las ciudades holandesas son las que mejor tratan la basura: un 65 por ciento es reciclado o utilizado para compost orgánico.

La disminución del impacto ambiental de Curitiba está estrechamente ligada a las gestiones de Jaime Lerner. Éstas se enfocan en el transporte y el planeamiento urbano. El plan maestro de la ciudad se estableció en 1965. En 1971, Lerner asumió como Alcalde, y una de sus primeras acciones fue donar a los ciudadanos un millón y medio de árboles para que los plantasen en sus jardines. Donde más se destacó fue con el transporte, aprobando 150km de "bicisendas", facilitando así el traslado no contaminante. Por otro lado, su sistema de tránsito basado en colectivos se hizo tan popular que la gente empezó a dejar sus automóviles en casa. En los últimos 20 años, la demanda de pasajeros se multiplicó por 50. Estos colectivos transportan 270 pasajeros cada uno; la versión rápida circula por un carril prioritario (ningún otro vehículo puede circular por el carril), haciendo previsible los horarios de destino más allá de las condiciones de tráfico. Este sistema llamado RBT "Rapid Bus Transit" ofrece muchas de las ventajas del subterráneo pero a un costo por kilómetro 80 veces menor.

Sistema de colectivos de tránsito rápido en Curitiba, Brasil. Foto: sustentator.org

De todas estas ciudades se pueden aprender conceptos valiosos. América Latina tiene todas las condiciones para ser la región más sustentable del planeta, gracias a nuestra amplia variedad de recursos y baja densidad de población. Está en nosotros aprovecharlo.

Rodrigo Herrera Vegas es co-fundador de sustentator.org

CLASE 2
INTRODUCCIÓN A LA DESCRIPCIÓN DE IMÁGENES

1. DESCRIPCIÓN: INTRODUCCIÓN

Pregunta disparadora: ¿Por qué creen que es importante, en arquitectura, una buena vinculación entre observación y escritura? ¿Qué ejemplos se les ocurren?

A lo largo de la carrera de arquitectura, muchas veces se encontrarán frente a la situación de describir algún objeto o construcción que han observado, o deberán relacionar algo leído con algo observado. En consecuencia, es importante que trabajemos en desarrollar habilidades que les permitan poner en palabras aquello que ven y conocer de qué recursos podrán valerse en esas ocasiones.

El contenido informativo que deseamos transmitir puede desplegarse y organizarse de diferentes modos, en función del lector y del tema que vamos a tratar. Podemos organizar el contenido bajo la forma de una secuencia narrativa, expositiva, argumentativa o descriptiva, y servirnos de recursos o estrategias como la comparación, la definición, la metáfora, el ejemplo, la analogía, etc. Estos diferentes modos de organizar la información a menudo coexisten en el discurso, pero también puede ocurrir que predomine una secuencia sobre otras o que se distribuyan de acuerdo con los requerimientos de las diferentes partes en la que se estructure el texto. En este Taller trabajaremos fundamentalmente la planificación y la **escritura de una descripción**, ya que es la secuencia textual que circula con mayor frecuencia en la comunidad académica de Arquitectura.

De manera general, podemos decir que en un texto descriptivo se presentan las características de las diferentes partes que componen un determinado objeto, lugar, hecho, individuo o concepto. Aquello que se describe puede pertenecer tanto al mundo de los objetos y de los fenómenos como a aspectos mucho más abstractos o conceptuales. De esta manera, las descripciones pueden abarcar tanto el proceso de construcción de un edificio como los sentimientos y emociones que despierta la observación de un determinado paisaje.

Las descripciones en Arquitectura suelen centrarse en objetos y lugares y, por lo tanto, están vinculadas a un **proceso de observación**. Para poder describir hace falta conocer aquello que se describe: el primer paso consiste, por lo tanto, en observar y tomar nota de los elementos que componen aquello que vamos a describir y sus cualidades. A continuación, tendremos que hacer un **recorte**, es decir, elegir qué vamos a describir de todo aquello que observamos. No todas las características son igualmente significativas; cada descripción hará una selección de los fenómenos observados, en función del interés del escritor, el punto de vista adoptado, el tema u otros requerimientos del texto (su destinatario, por ejemplo). Por último, una vez seleccionados los elementos que vamos a describir, debemos planificar cómo vamos a organizarlos en nuestro escrito, es decir, cuál va a ser la **estructura textual** que va a tener esa descripción.

Cada uno de estos pasos, previos a la escritura, exige el desarrollo de habilidades específicas que iremos ejercitando en cada una de las clases.

ACTIVIDAD. Descripción de imágenes

1) Leé el texto de Quaroni e identificá aquellas frases que utiliza el autor para describir el espacio en donde imagina encontrarse y para hacerse preguntas al respecto.
2) Hacé un dibujo de lo que te imagines a partir de su descripción.

2. ELEMENTOS PARA ELABORAR UNA DESCRIPCIÓN

Debemos tener en cuenta varias cuestiones a la hora de planificar y llevar a cabo la descripción de una imagen. Por un lado, reconocer cuál es el aspecto que se destaca de la imagen que estamos viendo o qué nos gustaría destacar a nosotros con nuestro texto. Podemos observar todos una misma imagen, pero elaborar descripciones muy diferentes según el punto de vista que adoptemos y los aspectos o elementos que queramos resaltar: así, por ejemplo, podemos centrarnos en la descripción del tipo de espacio (exterior/interior), su iluminación (artificial/natural, juegos de luces y sombras), el amoblado o la decoración, etc.

¿Qué elementos incorpora Quaroni en su descripción? Releer el texto en grupos e identificar los elementos que aparecen en la descripción.

Algunos elementos que podemos considerar a la hora de realizar una descripción son:

- **Tipo de imagen:** fotografía, cuadro, boceto, plano
- **Tipo de espacio:** exterior/interior, parque, plaza, jardín, patio, explanada, ingreso a un edificio/habitación, oficina, sala de exposiciones, aula, etc.
- **Iluminación:** ¿de dónde proviene la fuente de iluminación?, ¿es natural o artificial?, ¿es cálida o fría? ¿hay objetos o espacios que permanecen oscuros?); relación luz/sombra
- **Colores**: ¿cuáles son los colores y los matices de las figuras u objetos que se describen, cuál es la relación entre ellos (contraste, graduación, etc.)?

- **Objetos y figuras** presentes en el espacio y su posición relativa: ¿cómo están ubicados y ordenados? ¿qué distancia hay entre ellos?
- **Figura / fondo**: ¿cuáles son los elementos que aparecen y sobre qué superficie o fondo están emplazados?
- **Tamaño**: ¿cuáles son las medidas, reales o aproximadas, de los objetos representados o del objeto a describir?
- **Materiales**: ¿de qué materiales son los objetos?
- **Punto de vista**: ¿dónde se ubica el observador? ¿desde dónde mira?

ACTIVIDAD. Organización de la descripción

1) Elegir alguna de las siguientes imágenes para su descripción.
2) Pensar los modos posibles de organizar la descripción, según la información que la imagen nos brinda: ¿qué elementos considerarían y cuáles no? ¿Por qué?

IMAGEN 1. Restaurante Kook. Roma, Italia.

IMAGEN 2. Hábitat 67, complejo de viviendas situado en Montreal, Canadá. Arq. MosheSafdie.

IMAGEN 3. “El dormitorio en Arlés”. Vincent van Gogh, 1888.

IMAGEN 4. Hospital Naval Central de Buenos Aires (Arquitecto Clorindo Testa).

CLASE 3
ESCRITURA PLANIFICADA

1. ESCRITURA PLANIFICADA

En el apuro por resolver una consigna, muchas veces nos “largamos” a escribir apenas terminamos de leerla. Queremos llenar los renglones rápidamente y volcar allí todo lo que sabemos. Como un equivalente del proceso de lectura escalonada, una buena escritura también tiene pasos a seguir para darnos a entender lo mejor posible. Lograr un texto equilibrado, ordenado lógicamente, que le permita al lector entender todos los puntos de nuestra exposición y que no omita nada de información es casi imposible de lograr si no nos detenemos unos minutos a pensar cómo vamos a escribirlo. Para ello, debemos tener en cuenta cuál es el objetivo de nuestro texto, a quién está dirigido y de qué tipo de texto se trata. Este último interrogante nos lleva a preguntarnos por el orden en que presentaremos las ideas. Usualmente, las partes de un texto son:

A. **<u>Introducción</u>**: por lo general contiene información que le da pistas al lector sobre el tema que tratará nuestro texto. Es el momento de presentar el tema, exponer los objetivos perseguidos y anticipar, de ser necesario, la estructura general.
B. **<u>Desarrollo</u>**: este es el momento de volcar toda la información. Debemos tener muy en cuenta de qué manera distribuiremos nuestras ideas a lo largo del texto: cantidad de párrafos, subtema que tratará cada párrafo, orden jerárquico de la información.
C. **<u>Conclusión</u>**: se suele concluir el texto con un cierre donde se retome lo expuesto a lo largo de él.

Antes de comenzar a escribir, es importante tomarnos unos minutos para pensar y planificar **qué es lo que vamos a escribir y cómo vamos a hacerlo**. Esto se llama <u>planificar la escritura</u> y es algo que hasta los más renombrados ensayistas y científicos tienen por costumbre. No hay libro que no se haya escrito sin que antes su autor realizara un “mapa” mental sobre cómo iba a volcar todos los contenidos.

Por eso los invitamos a ejercitar la planificación de la escritura y adoptarla como una costumbre a partir de ahora, al momento de escribir ensayos, respuestas de exámenes, monografías y cualquier tipo de trabajos prácticos.

Algunas cuestiones a tener en cuenta son:

- ✓ Las ideas similares deben ir agrupadas.
- ✓ Párrafos similares deben ir agrupados.
- ✓ No queremos confundir al lector: escribamos sencillo.

Notas importantes sobre los párrafos:

- ✓ Un párrafo equivale a una idea.
- ✓ Cada párrafo tiene, generalmente, una oración principal y oraciones secundarias.
- ✓ Contribuyen a la fluidez de un párrafo:
    - o La organización lógica de las ideas.
    - o La incorporación de conectores (“entonces”, “en consecuencia”, “sin embargo”, “por otro lado”, “en segundo lugar”). Profundizaremos este tema en la próxima clase.
- ✓ Los lectores recuerdan mejor las primeras y las últimas oraciones, por lo que es recomendable concentrar o repetir allí las ideas principales del texto.

Etapas en el armado de un texto

Como veremos a continuación, la confección de un texto que nos permita darnos a entender con claridad implica etapas equivalentes a los de una lectura detenida, tal como vimos en el bloque anterior. Así, generalmente, la escritura supone los siguientes pasos:

1. Plan de escritura

- Como primera medida, acomodá los datos e ideas en un esquema organizado: enfocate en la organización de la información, no en los detalles.
- El plan de escritura no es inamovible. Simplemente sirve como una guía para organizar la información. Con frecuencia sucede que, a la hora de volcar este plan en un texto, hay partes que faltan o que nos parezca mejor cambiar de lugar.

2. Escritura

- Completá el texto utilizando ejemplos, evidencia, detalles.
- No te olvides de ser coherente con el modo, tiempo verbal y el público al que te dirigís. Podés escribir de un modo impersonal (“se presume”, “se demuestra”, “se espera que”), en primera persona del singular (“en esta investigación me propongo”) o en primera

persona del plural ("aquí sostenemos"). Lo importante es que mantengas el mismo estilo durante todo el texto.

- Hacé uso de conectores ("en consecuencia", "desde luego", "por ello") y organizadores ("en primer lugar", "en síntesis", "para concluir"), para darle fluidez al texto. La clase que viene trabajaremos este tema en profundidad.

3. Revisión

- Proponete leer tu trabajo en voz alta: el cerebro registra de manera diferente aquello que escucha y aquello que lee.
- No tengas miedo de deshacerte de oraciones o párrafos. Prestá atención a las distintas claves que te dimos la clase pasada para una escritura clara y prolija (puntuación y aportes para la escritura), algunas de ellas son:
    - Evitar palabras o frases vacías.
    - Redactar frases y oraciones cortas.
    - Evitar repeticiones y redundancias.
- Especialmente, hacé un chequeo de verbos. Subrayá para identificar:
    - Verbos escondidos en oraciones kilométricas.
    - Frases verbales (considerá si no hay un verbo que exprese la misma idea y haga más simple la comprensión).
- Pedile opinión a alguna otra persona (idealmente, que no sepa del tema: el objetivo es que comprenda el texto).
- Hacé una revisión de la organización del texto.
    - En los márgenes de cada párrafo, anotá una palabra o concepto que sintetice la idea principal.
    - Mové los párrafos y fijate si da lo mismo el orden en el que están. ¿Fluye lógicamente?
- Chequeá las referencias, títulos, subtítulos, bibliografía y numeración.

ACTIVIDAD: Plan de escritura: ejemplo e identificación

1) A continuación, te proponemos un plan de escritura. ¿De cuál de todas las imágenes ya vistas crees que se trata?

Primera parte: introducción de la imagen (un párrafo)

- Exponer de qué tipo de construcción se trata, el nombre del edificio, dónde se encuentra ubicado. Reponer algunos datos históricos de su construcción: quiénes son los arquitectos, cuándo se construyó, a qué tipo de movimiento arquitectónico pertenece.

Segunda parte: descripción de la imagen (uno o dos párrafos)

- Explicitar que se trata de una fotografía, el ángulo desde donde fue tomada y en qué consiste la imagen, en términos generales.
- Dar cuenta de los elementos más relevantes de edificación: hacer explícita la iconicidad de la construcción (averiguar motivos) y explicar cuáles son los elementos que permiten identificar esa semejanza (color de la fachada, forma del edificio, curvatura de los aleros de las ventanas, la parte de la construcción en altura que asemeja la torre donde se ubica el periscopio de un submarino).
- Exponer relación del edificio con el entorno donde se encuentra.

Tercera parte: conclusión (un párrafo)

- Relacionar la iconicidad expuesta en la segunda parte con el tipo de movimiento arquitectónico y con los motivos de su edificación.

CONSIDERACIONES SOBRE LA ESCRITURA

- ✓ Evitar oraciones largas. Una idea extensa se puede dividir en dos oraciones distintas.
- ✓ No exagerar la distancia entre el sujeto y el verbo principal de la oración. Recordemos que el lector está esperando encontrarse con el verbo.
- ✓ Eliminar todas las palabras y frases innecesarias o que no agregan contenido.
    - *"Es bien sabido que/ Se sabe que/ Como todos bien sabemos, el calentamiento global es una de las mayores preocupaciones de los líderes del mundo".*
- ✓ Evitar la repetición y la redundancia.
    - "*Salir afuera*", "*subir arriba*"
    - *"El diseñador diseña…"*
    - *"Existe la posibilidad de que sea posible realizar un proyecto…"*
- ✓ Reducir la inclusión de adverbios, y tener en cuenta que son invariables según género y número. Los adverbios son complementos de un verbo, un adjetivo u otro adverbio. Hay adverbios de tiempo, lugar, modo, cantidad, entre otros.
    - *"Cerró fuertemente la puerta"* → *"Cerró la puerta con fuerza".*

- "*Comentó pertinentemente a lo largo del debate*" → "*Realizó comentarios pertinentes a lo largo del debate*"
- "*Está media fatigada*" → "*Está medio fatigada*".

✓ Evitar el abuso de frases verbales innecesarias;

- "*dar origen a*" → "*causar*".
- "*tiene un efecto sobre*" → "*afecta*".
- "*debido al hecho de que*" → "*porque*".

✓ Transformar los negativos en afirmativos: generalmente, es mucho más claro.

- "*No es pertinente*" → "*Es impertinente*"

✓ Prestar atención a la **puntuación**: muchas veces, un uso incorrecto de los signos de puntuación puede cambiar el sentido de lo que escribimos. Veamos algunos ejemplos:

1. "*Vinieron a la fiesta los bailarines Hitler y Stalin*". (Nota: Hitler y Stalin no son bailarines). →*Vinieron a la fiesta los bailarines, Hitler y Stalin.*
2. "Vamos a comer viejos". (Nota: no somos caníbales, tan sólo queremos invitar a nuestros padres a cenar). → *Vamos a comer, viejos.*
3. "No espere". (Nota. Queremos responderle a alguien con una negación, y sugerirle que espere). →*No, espere.*

Usos obligatorios de la coma:

Enumeraciones, series.
Ejemplo: "*Visitaron Roma, París, Praga, Viena y Varsovia*".

El vocativo va entre comas.
Ejemplo: "*Vení a comer, Juan*".

La elipsis o supresión de verbos se marca con una coma.
Ejemplo: "Los profesores votan el 17; los estudiantes, el 18". (La coma en la segunda parte de la oración indica la supresión del verbo *votar*).

La inversión del orden lógico de la oración (primero predicado y luego sujeto).
Ejemplo: "*A la hora del té, Laura dejó de estudiar*".

Las oraciones condicionales se aíslan mediante coma cuando van antepuestas al verbo principal, pero no suelen ir precedidas de coma sin van pospuestas[1]:
Ejemplos:
"Si vas a llegar tarde, no dejes de avisarme".
"No dejes de avisarme si vas a llegar tarde".

Lo mismo cabe decir de las construcciones concesivas:
"Aunque no quieras, te llevaré al hospital".

"Te llevaré al hospital aunque no quieras."

[1] http://hispanoteca.eu/gram%C3%A1ticas/Gram%C3%A1tica%20espa%C3%B1ola/Ortograf%C3%ADa-%20RAE%202010-Coma.htm

No va coma antes de "y" en la enumeración pero sí cuando agregamos información o cuando cambiamos de sujeto.

Ejemplo: *"Compró una botella de vino, un queso y un pan, y llamó a sus amigos."*

Además…

Las aclaraciones irán entre **comas**, **guiones** o **paréntesis**, según el grado de relevancia que tengan.

Ejemplo: *"Neil de Grasse Tyson, un renombrado astrofísico estadounidense, fue elegido para ser el anfitrión de la serie Cosmos cuando fue relanzada en 2013"*

En el resto de los casos, la coma se utiliza discrecionalmente de acuerdo a lo que quiere decir el escritor y al ritmo que quiere darle a la lectura.

¡ATENCIÓN! Errores frecuentes en la escritura

1. **¿Quién es el sujeto?** Como nos enseñaron a no repetir, un error típico es evitar mencionar de nuevo el nombre de una persona o el pronombre que la refiere, para no sonar redundantes. Lo cierto es que muchas veces esa falta de repetición atenta contra la comprensión: "*Pablo está enojado con Juan. Pedro le dijo que no se preocupara*". ¿A quién le habló Pedro? ¿A Pablo o a Juan?

2. **Coma luego del sujeto.** Es el error más común dentro del abuso de comas. No hay ninguna razón para agregar una coma después de un sujeto: "El perro" (sujeto) "baila" (predicado) es "El perro baila" y no el "El perro, baila". Es decir, el sujeto, en casi ningún caso, debe llevar una coma antes del predicado. La excepción se da cuando se trata de un sujeto complejo, es decir, que tiene complementos que caracterizan al núcleo del sujeto ("Laura, que es la que mejor dibuja a mano, se encargará de hacer el boceto") o aposiciones (es decir, una construcción que equivale al sujeto: "Oscar Niemeyer, el Pelé de la arquitectura brasileña, murió en el año 2012").

3. **Mal uso de gerundios.** Muchas personas no usan gerundios porque les enseñaron que "no es bueno usarlos". En realidad, lo correcto es utilizarlos apropiadamente: no usarlos cuando corresponde hacerlo es tan erróneo como usarlos de la manera equivocada. Generalmente, el mal uso de los gerundios aparece asociado a una mala comunicación de los tiempos en que suceden las acciones: "*Le agarró un infarto, cayendo al piso*". Si queremos decir que a la persona le agarró un infarto mientras caía al suelo, el uso del gerundio está bien, pero habría que eliminar la coma. Si lo que se quiere decir es que le agarró un infarto y que, en consecuencia, cayó al piso, el gerundio está mal usado. Entonces, el gerundio se usa para indicar acciones simultáneas a la que indica el verbo conjugado, pero NUNCA para indicar acciones posteriores.

4. **Mal uso de la preposición "de".** Un error muy común es el uso de la preposición *de* delante de la conjunción *que* en casos en que no es exigida por ninguna palabra del enunciado. Este fenómeno se conoce como **dequeísmo**. Veamos algunos ejemplos:
   - "Es probable de que vaya" → "Es probable que vaya"
   - "Pienso de que deberíamos vernos más seguido" → "Pienso que deberíamos vernos más seguido"
   - "Es necesario de que no falten" → "Es necesario que no falten"

En estos casos, debemos tener en cuenta que aquello que está introducido por la conjunción *que* es una proposición subordinada, que puede reemplazarse por *eso* o *esto* o por un sintagma nominal. En este sentido, una manera de asegurarnos si la preposición *de* debe estar presente, es realizar este reemplazo. Por ejemplo:

1. “Es probable de que vaya”
    a. “Es probable *de eso*” (o “De eso es probable”)
    b. “Es probable *eso*” (o “Eso es probable”)

Al realizar el reemplazo, vemos que la opción (b), sin la preposición, es la correcta. Por lo tanto, la frase inicial deberá corregirse: “Es probable que vaya”.

2. “Estoy segura de que va a venir”
    a. Estoy segura *de eso / de su presencia*
    b. Estoy segura *eso*

En este segundo caso, al realizar el reemplazo, vemos que la opción (a) se presenta como correcta; es decir, que en este caso la preposición de es exigida por la construcción verbal y, por lo tanto, la frase correcta es “Estoy segura de que va a venir”.

Otra forma de comprobar cuándo se usa “de” y cuándo “de que” es hacernos la pregunta cuya respuesta es la afirmación que estamos intentando escribir. Pensemos en los siguientes casos:

3. Me dijeron de que se iban a mudar.
4. Me alegro de que vengas.

Recomendamos, en estos casos, pensar las opciones de pregunta con o sin preposición:

“¿De qué te dijeron?” o “¿Qué te dijeron?”

“¿De qué te alegrás? o “¿Qué te alegrás?”

Esta prueba permite que nos demos cuenta de que, en el ejemplo (3) debemos quitar la preposición (¿Qué te dijeron? Me dijeron que se iban a mudar) y que, en (4), su uso es correcto (¿De qué te alegrás? Me alegro de que vengas).

<u>ACTIVIDAD</u>: Confección del plan de escritura

1) A partir de la imagen trabajada en la clase anterior, armá un plan de escritura.

CLASE 4
COHERENCIA Y COHESIÓN. CONECTORES.

1. LA COHERENCIA

La coherencia es la propiedad que da cuenta de la unidad semántica de un texto, es decir, de la relación interna de los significados de un texto escrito, para otorgarle unidad y sentido global. Es la conexión necesaria que debe existir entre las ideas que presenta un texto para desarrollar un tema. Un texto es coherente cuando sus ideas tienen una relación lógica y cuando están organizadas y distribuidas de forma correcta.

ACTIVIDAD. Coherencia

1) Leé el siguiente enunciado y señalá cuáles son los problemas que dificultan la comprensión:

> *Los niños se alegraron al abrir los regalos que estaban junto al árbol de navidad. Las clases estaban acabando y ya tenían ganas de que llegaran las navidades.*

2) Después de discutirlo grupalmente, reformulá el enunciado de manera que las ideas se presenten de manera coherente.

2. LA COHESIÓN

Un texto es cohesivo cuando todas sus partes se articulan de modo tal que producen un efecto unificado. Para lograrlo se utilizan distintos recursos. Los más comunes son:

- **La referencia**: sustituir una palabra por otra que se refiere a ella y así evitar reiteraciones innecesarias. Esto se realiza generalmente con los pronombres. Ejemplo: *María es la nueva vecina. El hijo de María es médico*. Ejemplo de sustitución: *María es la nueva vecina. Su hijo es médico*.
- **La elipsis**: dejar un vacío en lugar del elemento a sustituir. Puede ser verbal (evitamos repetir un verbo) o nominal (evitamos repetir un sustantivo). Ejemplo: *Francisco es mi hermano menor. Francisco es muy inteligente*. Ejemplo de elipsis: *Francisco es mi hermano menor. Es muy inteligente*.
- **Uso de conectores**: los conectores expresan relaciones de significado entre las oraciones y ayudan al lector a comprender cómo están organizadas y vinculadas las ideas en un texto. A continuación, trabajaremos sobre ello.

ACTIVIDAD. Coherencia y cohesión

1) Revisar los siguientes enunciados e identificar posibles errores de coherencia y cohesión. Reescribirlos.

A. *He llegado tarde a clase porque tengo un buen despertador.*
B. *Los estudiantes de arquitectura aprecian mucho la arquitectura porque la arquitectura es una disciplina apasionante.*
C. *Tenía bastante dinero para comprarlo, sin embargo me lo compré.*
D. *Carlos, que estaba muy nervioso, llamó por teléfono a Luisa porque quería hablar con Luisa. Carlos le dijo a Luisa que necesitaba verla. Carlos y Luisa se encontraron esa misma tarde.*
E. *Aunque te gustó la película es una lástima que no hayas podido ver la película.*

3. USO DE CONECTORES

¿Qué es un conector?

Tan importante como respetar los signos de puntuación y usarlos consistentemente, es lograr cohesión y coherencia en un texto a través del uso efectivo de las palabras. Los conectores expresan relaciones de significado entre las oraciones. Esta es una de las estrategias más ricas de la lengua ya que indica de qué manera los contenidos se relacionan entre sí.

TIPO DE CONECTORES	**CONECTORES**	**EJEMPLO**
Copulativos: expresan una suma de los elementos que coordinan	Y (e), ni, además, incluso, etc.	*Está frenado el diálogo entre el gobierno* ***y*** *los sindicatos.* ***Además****, los trabajadores anunciaron paro de actividades.*
Disyuntivos: Expresan la exclusión de una de las partes	O, u	*Los peritos indicaron que el derrumbe pudo haberse producido por una explosión* ***o*** *porque cedieron los cimientos.*
Adversativos/Concesivos: expresan oposición u	Pero, sin embargo, no obstante, a pesar	*Los usuarios solicitaron modificar el reglamento,* ***pero*** *ahora desean volver a la normativa anterior.* (adversativo)

objeción entre los elementos de la oración.	de, aunque, si bien, etc.	***Aunque** no fue una propuesta del oficialismo, fue votada por unanimidad.* (Concesivo)
Consecutivos: expresan una consecuencia o efecto	Entonces, por lo tanto, en consecuencia, así que, etc.	*La residencia legal está garantizada.* ***Por eso*** *emprendieron el viaje.* *No hubo acuerdo con el sindicato,* ***así que*** *habrá paro de actividades.*
Temporales: expresan relaciones de anterioridad, simultaneidad o posterioridad	Antes, mientras, durante, después, luego, más tarde.	***Después de*** *reanudarse las negociaciones con los sindicatos, se establecerán las pautas del acuerdo básico.* *Es necesario encontrar una solución pacífica* ***antes de*** *implementar el plan de intervención.*
Causales: introducen la causa entre dos partes	Porque, ya que, puesto que, a raíz de, debido a	***Debido a*** *su comportamiento impropio, fue expulsado del lugar.* *Los estudiantes se retiraron antes* ***porque*** *faltó el profesor.*
Condicionales: Señala una condición o requisito para que se cumpla un hecho.	En caso de que, siempre y cuando, si…, con la condición de que, toda vez que	***Si*** *venís a casa, preparo una torta.* *A los alumnos no se les imputará la inasistencia* ***siempre y cuando*** *presenten un certificado médico.*
De ordenamiento: Señalan el orden en el que se organiza y presenta la información.	En primer lugar, posteriormente, finalmente, por otra parte, etc.	***En primer lugar**, los estudiantes organizaron los grupos y discutieron los pasos a seguir.* ***Posteriormente**, dividieron las tareas.*
Finalidad: expresan la finalidad con que sea realiza una acción	Con el objeto de, con el propósito de, a fin de, para	*El proyecto de Ley debe ser enviado al Congreso* ***para que*** *sea discutido.* ***Con el propósito de*** *establecer acuerdos, el presidente se reúne con las cámaras empresarias.*

<u>ACTIVIDAD</u>. Conectar las ideas de un texto

1) A partir de las opciones dadas, completá las líneas punteadas del siguiente fragmento del artículo "Un arquitecto japonés en un basural del conurbano".

1. *Sin embargo* *Por esta razón* *Además* *2.* *En cambio* *Aunque* *Asimismo*	Cuando era chico, TakuSakaushi tocaba el violín con virtuosismo. (1)……………………. su madre lo alentó para que se transformara en músico profesional. (2)…………………., su padre, un profesor de economía simpatizante de Karl Marx, no estaba del todo seguro. Menos cuando Taku, ya en edad universitaria, se paró ante él con las piezas de cerámica que había aprendido a modelar. "El arte es hermoso pero no es rentable. Te conviene estudiar una carrera rentable", opinó. Sakaushi se convirtió en uno de los arquitectos más refinados del mundo. Esto ocurrió en un barrio de Tokio un poco alejado del centro donde Taku podía jugar al béisbol. Esos terrenos ya fueron fagocitados por la construcción.
3. *Para eso* *Aunque* *Por lo tanto*	En Japón viven 126 millones de personas sobre unos 378 mil kilómetros cuadrados (para tomar una referencia, Argentina tiene 40 millones de personas en casi tres millones de metros cuadrados). (3)…………………….. la problemática habitacional es un tema vital. La población no está dividida de modo equitativo sino que se apiña en las ciudades más importantes: Tokio, Yokohama y Osaka. También, Hiroshima y Nagasaki. No es casual que a mediados de los cuarenta Estados Unidos haya elegido estos dos lugares para arrojar un par de bombas atómicas que rasgaron al medio la historia nipona (y mundial). Cuando las tropas norteamericanas se retiraron en 1952, este pequeño país fue curando sus heridas –al menos, las materiales– y se convirtió en una de las grandes potencias del mundo. Lo primero que dirá Sakaushi, nacido en 1959, es que él es hijo de esa época de cambios drásticos.
4. *Sin embargo* *Más tarde* *En resumen*	(4)……………………………, él no está pensando en sus orígenes. Ahora está parado sobre una montaña de basura de ocho metros de alto en una barriada popular del partido de San Martín, en la zona norte del Gran Buenos Aires.
5. *Asimismo* *Para eso* *Luego* *6.* *Así* *Con todo* *Si*	Hace veinte años los camiones de una empresa de demolición empezaron a descargar toneladas de escombros ahí. (5)……………………….., desaparecieron. Sobre esa tierra dura creció la maleza. De allí a que la zona se transformarse en un basural, hubo un solo paso. En esa porción del Barrio Sarmiento viven unas dos mil personas y, como en todo asentamiento precario, la recolección periódica de residuos no abunda. (6)……………………………., "La Montañita", como la llaman los vecinos, fue creciendo a su antojo. En sus bordes se multiplican pañales, bolsas de nylon, vidrios, papeles, restos de alimentos. Todo arde bajo un fuego perezoso animado por el viento, que sopla anunciando tormenta. El humo se diluye sobre las calles de tierra.

	Sakaushi sube y se pierde arriba, entre los pastos. Al bajar, ni sus zapatillas ni sus pantalones claros tienen una mota de polvo.
	¿Cómo llega un arquitecto japonés a escalar un basural del conurbano bonaerense?
	Hay que buscar la respuesta en los intercambios anuales que realiza el Instituto de Arquitectura y Urbanismo de la Universidad de San Martín con profesionales de distintos lugares del mundo.
	En agosto pasado, Sakaushi fue uno de los invitados del Taller de Arquitectura y Urbanismo (TAU) que realiza ese instituto de la UNSAM desde 2013. Durante una semana, se reúnen arquitectos y estudiantes pero también profesionales de otras disciplinas: científicos, matemáticos, sociólogos, economistas. A la par de conferencias y workshops, ellos piensan soluciones conjuntas para problemáticas habitacionales que afectan al territorio donde se asienta la universidad; especialmente, en la cuenca del río Reconquista. Ahí viven 450 mil personas, de las cuales casi el siete por ciento tiene necesidades básicas insatisfechas.
7. *Finalmente* *Luego* *En primer lugar* *8.* *Finalmente* *Luego* *En primer lugar*	Fabián de la Fuente es coordinador general del TAU y explica cómo funciona: (7)……………………..se forman grupos de trabajo que entrevistan a los vecinos y consultan la opinión de funcionarios. (8)…………..……………., concentran su trabajo proyectual en el diseño de una solución para el problema planteado. Por ejemplo, en el caso de "La Montañita", el desafío consiste en transformar ese basural en lugar de esparcimiento. Hasta allí llegó Sakauhsi, acompañado por unos veinte estudiantes (algunos japoneses) y docentes vinculados al TAU.
9. *Aunque* *Pero* *También* *10.* *Aunque* *Finalmente* *También*	Sakaushi acepta un mate. Le preguntan si le gusta. Él responde que es un poco amargo (9)…………..………….. que ya lo ha tomado las cinco veces que estuvo en Argentina. La primera fue en 2010, cuando presentó una muestra con sus trabajos en el Museo de Arquitectura y Diseño de la Sociedad Central de Arquitectos. En esa oportunidad (y en ésta) fue invitado por Roberto Busnelli, que actualmente es el Secretario Ejecutivo del Instituto de Arquitectura de la UNSAM y que (10)……………………… ha viajado a Japón para interiorizarse sobre el trabajo de su colega.
11. *Por un lado* *Además* *Y*	"Él es considerado una referencia en el campo de la métrica arquitectónica, lo que explica sus líneas geométricas. (11) …………...…………., se destaca por el modo en que pone en diálogo la ingeniería, la filosofía y las inquietudes socio-ambientales. Combina el vínculo entre teoría y práctica de un modo que en la universidad nos interesa mucho", cuenta Busnelli. […]

Adaptado de: Romero, I. (2017). Un arquitecto japonés en un basural del conurbano. *Anfibia.*

ACTIVIDAD 1: Reescritura cohesiva.

1) Escribí un texto cohesivo a partir de las siguientes oraciones:

José Pérez estaba preocupado.
José Pérez iba en el auto de José Pérez.
El auto de José Pérez tenía poco combustible.
José Pérez no sabía dónde había un lugar para cargar combustible.
José Pérez buscó un mapa en la guantera del auto de José Pérez.
José Pérez encontró un mapa en la guantera del auto de José Pérez.
José Pérez miró un mapa que encontró.
José Pérez se dio cuenta de que no sabía dónde estaba.
José Pérez vio una persona al costado de la ruta.
Al costado de la ruta había un negocio.
En el negocio se vendían artesanías.
En el negocio había un vendedor de artesanías.
José Pérez detuvo el auto de José Pérez.
José Pérez bajó el vidrio del auto de José Pérez.
José Pérez le habló a un vendedor que estaba en un negocio al costado de la ruta.
José Pérez preguntó dónde había un lugar para cargar combustible en el auto de José Pérez.
El vendedor de artesanías que estaba en el negocio al costado de la ruta dijo que había una estación de servicio a pocos metros del negocio de artesanías.
José Pérez dijo “gracias” al vendedor de artesanías.
José Pérez puso en marcha el auto de José Pérez.
José Pérez manejó tranquilo hasta la estación de servicio ubicada a pocos metros del negocio de artesanías.